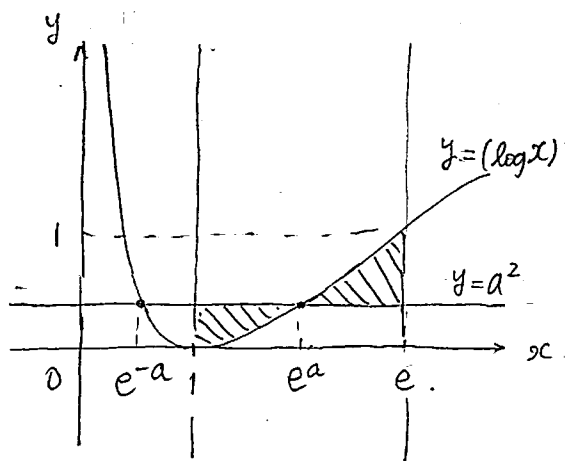




$$(1) (\log x)^2 - a^2 = 0 \quad 1 < x < e$$

$$(\log x + a)(\log x - a) = 0 \text{ より}$$

$$\log x = \pm a$$

$$\text{よって } x = e^{\pm a} \quad (\text{被符号同順})$$

$0 < a < 1$ のとき 左のようなグラフとなり

$F(a) = \int_1^e |(\log x)^2 - a^2| dx$ は左図の斜線部の面積となる

$$\therefore \text{不定積分 } \int \{(\log x)^2 - a^2\} dx =$$

$$= \int \{x'(\log x)^2 - a^2\} dx$$

$$= x(\log x)^2 - \int x \cdot (2 \log x) \cdot \frac{1}{x} dx - a^2 x$$

$$= x(\log x)^2 - a^2 x - 2 \int x' \log x dx$$

$$= x(\log x)^2 - a^2 x - 2x \log x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x(\log x)^2 - a^2 x - 2x \log x + 2x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_1^e |(\log x)^2 - a^2| dx = - \int_1^{e^{-a}} \{(\log x)^2 - a^2\} dx + \int_{e^a}^e \{(\log x)^2 - a^2\} dx \\ &= [-x(\log x)^2 + a^2 x + 2x \log x - 2x]_1^{e^{-a}} \\ &\quad + [x(\log x)^2 - a^2 x - 2x \log x + 2x]_{e^a}^e \\ &= 2 \left\{ -e^{-a} \cdot a^2 + a^2 e^{-a} + 2e^{-a} \cdot a - 2e^{-a} \right\} - a^2 \cdot 1 + 2 \\ &\quad + e \cdot 1 - a^2 e - 2e \cdot 1 + 2e \\ &= \boxed{4e^a(a-1) - a^2(e+1) + e+2} \quad \text{となる} \end{aligned}$$

$$(2) F'(a) = 4e^a(a-1) + 4e^a \cdot 1 - 2a(e+1)$$

$$= 4e^a a - 2a(e+1)$$

$$= 4a \times \left(e^a - \frac{e+1}{2} \right) \quad \text{よって } F'(a) = 0 \text{ の } 0 < a < 1 \text{ の解は}$$

$$e^a = \frac{e+1}{2} \text{ より } a = \log \frac{e+1}{2}$$

よって $F(a)$ の増減表は以下のようなのである

a	0	...	$\log \frac{e+1}{2}$	...	1
$F'(a)$		-	0	+	
$F(a)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

$F(a)$ を最小にする a の値は

$$\boxed{a = \log \frac{e+1}{2}} \quad \text{となる}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{そのとき } F\left(\log \frac{e+1}{2}\right) &= 4 \times \frac{e+1}{2} \left(\log \frac{e+1}{2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\log \frac{e+1}{2} \right)^2 (e+1) + e+2 \right. \\ &= 2(e+1) \log \frac{e+1}{2} - \left(\log \frac{e+1}{2} \right)^2 (e+1) - (e+1) + 1 \\ &= 1 - (e+1) \left(\log \frac{e+1}{2} - 1 \right)^2 \quad \left. \text{が最小値となる} \right) \end{aligned}$$

((1) 別解)

$$t = \log x \text{ とおく} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{より} \quad dx = x dt = e^t dt, \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \dots e^a \dots e \\ \hline t & 0 \dots a \dots 1 \end{array} \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_1^e |(\log x)^2 - a^2| dx = - \int_1^{e^a} \{(\log x)^2 - a^2\} dx + \int_{e^a}^e \{(\log x)^2 - a^2\} dx \\ &= \int_0^a (-t^2 e^t + a^2 e^t) dt + \int_a^1 (t^2 e^t - a^2 e^t) dt \quad \text{よって} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \int t^2 e^t dt &= \int t^2 (e^t)' dt = t^2 e^t - \int 2te^t dt \\ &= t^2 e^t - \int 2t(e^t)' dt \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2 \int e^t dt \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

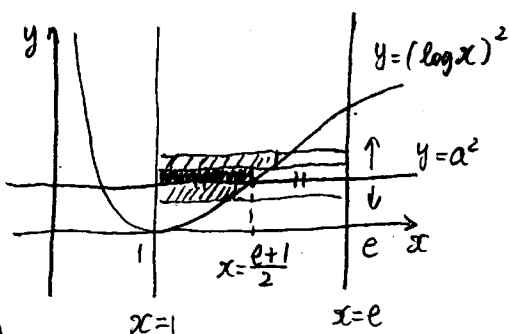
$$\begin{aligned} F(a) &= [-t^2 e^t + 2te^t - 2e^t + a^2 e^t]_0^a + [t^2 e^t - 2te^t + 2e^t - a^2 e^t]_a^1 \\ &= -\cancel{a^2} e^a + 2ae^a - 2e^a + \cancel{a^2} e^a + 2 - a^2 + e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - \cancel{a^2} e \\ &\quad - \cancel{a^2} e^a + 2ae^a - 2e^a + \cancel{a^2} e^a \end{aligned}$$

$$= [4e^a(a-1) - a^2(e+1) + e + 2] \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned} ((2) \text{ 別解}) \quad F(a) &= - \int_1^{e^a} \{(\log x)^2 - a^2\} dx + \int_{e^a}^e \{(\log x)^2 - a^2\} dx \\ &= - \int_1^{e^a} (\log x)^2 dx + a^2 \int_1^{e^a} dx + \int_{e^a}^e (\log x)^2 dx - a^2 \int_{e^a}^e dx \quad \text{よって} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(a) &= -(\log e^a)^2 \cdot (e^a)' + 2a \int_1^{e^a} dx + a^2 \cdot 1 \cdot (e^a)' - (\log e^a)^2 \cdot (e^a)' \\ &\quad - 2a \int_{e^a}^e dx + a^2 \cdot 1 \cdot (e^a)' \\ &= -\cancel{a^2} e^a + 2a(e^a - 1) + \cancel{a^2} e^a - \cancel{a^2} e^a - 2a(e - e^a) + \cancel{a^2} e^a \\ &= 2a \{2e^a - (1+e)\} \quad \text{よって } F'(a) = 0 \text{ の } 0 < a < 1 \text{ の解は } e^a = \frac{1+e}{2} \end{aligned}$$

(ほかの別解法)



$x=1$ と $x=e$ の中間の $x = \frac{1+e}{2}$ を考えると左の $\square$ と $\square$ の面積は等しい。そこから $y=a^2$ を上げて $F(a)$ (面積) は増えることになる。

よって $F(a)$ は $x = \frac{e+1}{2}$ で最小となる

このとき $y = a^2 = (\log \frac{e+1}{2})^2$ であり $0 < a < 1$ より

$a = \log \frac{e+1}{2}$ で $F(a)$ は最小となる