

$$I_k(t) = \int_0^t x^k e^{-ax} dx \quad \therefore I_0(t) = \int_0^t e^{-ax} dx \text{ により}$$

$$(1) I_0(t) = \int_0^t e^{-ax} dx = \left[-\frac{1}{a} (e^{-ax} - 1) \right]_0^t = -\frac{1}{a} (e^{-at} - 1) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

$$\therefore e^{-at} = \left(\frac{1}{e^a}\right)^t \text{ であり, } a > 0 \text{ より } 0 < \left(\frac{1}{e^a}\right) < 1 \text{ であるから}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} = 0$$

$$\text{ゆえに } \boxed{t \rightarrow \infty \text{ のとき } I_0(t) \text{ は収束し, } \lim_{t \rightarrow \infty} I_0(t) = \frac{1}{a}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \boxed{I_{k+1}(t)} &= \int_0^t x^{k+1} e^{-ax} dx \\ &= \int_0^t x^{k+1} \left(-\frac{1}{a} e^{-ax}\right)' dx \\ &= \left[-\frac{1}{a} x^{k+1} e^{-ax} \right]_0^t - \int_0^t (k+1) x^k \left(-\frac{1}{a}\right) e^{-ax} dx \\ &= -\frac{1}{a} (t^{k+1} e^{-at} - 0) + \frac{k+1}{a} \int_0^t x^k e^{-ax} dx \\ &= \boxed{-\frac{1}{a} t^{k+1} e^{-at} + \frac{k+1}{a} I_k(t)} \end{aligned}$$

$$(3) I_k(t) \text{ により } k=0 \text{ のときは (1) より } t \rightarrow \infty \text{ のとき } I_0(t) \text{ は収束し}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_0(t) = \frac{1}{a}$$

$k=n$ のとき (n は 0 以上の整数) で $t \rightarrow \infty$ のとき $I_n(t)$ が収束すると仮定すると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_n(t) = \alpha_n \quad (\alpha_n \text{ は実数}) \text{ とおける}$$

$\therefore k=n+1$ のとき (2) より

$$I_{n+1}(t) = -\frac{1}{a} t^{n+1} e^{-at} + \frac{n+1}{a} I_n(t) \text{ となり}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{n+1} e^{-at} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_n(t) = \alpha_n \text{ より}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{n+1}(t) \text{ は収束し}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{n+1}(t) = 0 + \frac{n+1}{a} \alpha_n \text{ となる } \text{--- ①}$$

以上のことから 0 以上の整数 k で $t \rightarrow \infty$ のとき $I_k(t)$ は収束するので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_k(t) = \alpha_k \text{ とおくと}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{a} \text{ であり ①より } \alpha_{k+1} = \frac{k+1}{a} \alpha_k \text{ となり}$$

$$\text{この両辺に } \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \text{ をかけると } \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \alpha_{k+1} = \frac{a^k}{k!} \alpha_k \text{ より}$$

$$\left\{ \frac{a^k}{k!} \alpha_k \right\} \text{ は一定の数となり } \frac{a^k}{k!} \alpha_k = \frac{a^0}{0!} \alpha_0 = \frac{1}{1} \times \frac{1}{a}$$

$$\text{ゆえに } \boxed{\alpha_k = \lim_{t \rightarrow \infty} I_k(t) = \frac{k!}{a^{k+1}}} \text{ となる}$$