神戸大前期文系

$\boxed{1}$ 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．a_1 は関数 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 10x \ (x \geqq 0)$ が最小値をとるときの x の値とする．a_{n+1} は関数 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 10a_n x \ (x \geqq 0)$ が最小値をとるときの x の値とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{10} a_n$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_1 と b_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $\dfrac{a_1 a_2 a_3}{100}$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n で最小のものを求めよ．

(2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n で最小のものを求めよ．

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる確率を求めよ．

$\boxed{3}$ a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする．放物線 C と直線 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ $C: y = ax^2 + bx + c$, $\ell_1: y = -3x + 3$, $\ell_2: y = x + 3$ で定める．ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき，以下の問に答えよ．

(1) b を求めよ．また c を a を用いて表せ.

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする．a が (2) の条件を満たしながら動くとき，$\triangle$PQR の重心 G の軌跡を求めよ．

1

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-10x$ $(x\geqq 0)$ とすると

$f'(x)=x^2-10=(x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10})$

よって $x\geqq 0$ での増減表は以下のようになる

x	0	…	$\sqrt{10}$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	最小	↗

ゆえに $x=\sqrt{10}$ で $f(x)$ は最小値をとるから

$\boxed{a_1=\sqrt{10}}$

また、この両辺は正より

$\log_{10}a_1=\log_{10}\sqrt{10}$ だから

$\boxed{b_1}=\log_{10}10^{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{2}}$ となる

(2) $f_n(x)=\frac{1}{3}x^3-10a_nx$ $(x\geqq 0)$ とすると

$f_n'(x)=x^2-10a_n=(x+\sqrt{10a_n})(x-\sqrt{10a_n})$ $(a_n>0$ より$)$

よって $x\geqq 0$ での増減表は以下のようになる

x	0	…	$\sqrt{10a_n}$	…
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$
$f_n(x)$		↘	最小	↗

ゆえに $x=\sqrt{10a_n}$ で $f_n(x)$ は最小値をとるから

$\boxed{a_{n+1}=\sqrt{10a_n}}$ がなりたつ

(3) $a_n>0$ より $a_{n+1}=\sqrt{10a_n}$ の両辺正だから

$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{10a_n}$

よって $b_{n+1}=\frac{1}{2}(\log_{10}10+\log_{10}a_n)$ より

$\boxed{b_{n+1}=\frac{1}{2}(1+b_n)}$ がなりたつ ①

$\left(\begin{array}{l} c=\frac{1}{2}(1+c) \text{ とくと} \\ 2c=1+c \\ c=1 \end{array}\right)$

(4) ①の両辺から1をひいて

$b_{n+1}-1=\frac{1}{2}(b_n-1)$ より

$\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$b_n-1=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より $\boxed{b_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ となる

(5) $T=\frac{a_1a_2a_3}{100}$ とおくと $a_n>0$ よりこの両辺は正だから

$$\log_{10}T=\log_{10}\frac{a_1a_2a_3}{100}=\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3-\log_{10}100$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)-2$$

$$=1-\frac{4+2+1}{8}=\frac{1}{8}$$

よって $T=10^{\frac{1}{8}}$ より $\boxed{\frac{a_1a_2a_3}{100}=10^{\frac{1}{8}}}$ となる

2

(1) $\begin{cases} 1=1 \\ 2=2 \\ 3=\quad 3 \\ 4=2^2 \\ 5=\quad\quad 5 \\ 6=2\times 3 \end{cases}$ であり この最小公倍数が解となるので

$\boxed{n} = 2^2\times3\times5 = \boxed{60}$ である

（1～6のすべてが60の約数になっている）

(2) 1から6の素因数のうち 5を除いた 1, 2, 3, 4, 6 の最小公倍数は12.

出た目が12の約数となる確率は 1, 2, 3, 4, 6 がでる場合を考えて $\frac{5}{6}$

$n \leqq 11$ のときのそれぞれについて 1個さいころをなげて出た目が n の約数となる確率を求めると

$n=1$ で 1のみで確率 $\frac{1}{6}$

$n=2$ で 1, 2 の場合となり 確率 $\frac{2}{6}$

$n=3$ で 1, 3 の場合となり 確率 $\frac{2}{6}$

以下 $n=4, 5, \cdots, 11$ について表にまとめると 以下のようになる

n	4	5	6	7	8	9	10	11
場合	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6	1, 7	1, 2, 4	1, 3	1, 2, 5	1
確率	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

よって 1個のさいころを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ となるような最小の n は $\boxed{n=12}$

(3) $20=2^2\times5$ より，3回とも 1か2か4か5が出る必要がある

但し 3回の目の積が 20以下となるので

3回の数字が (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 4), (1, 1, 5),

(1, 2, 2), (1, 2, 5), (1, 4, 5), (2, 2, 5)

の場合である

(i) (1, 1, 1) のとき $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

(ii) (1, 1, 2), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 2, 2), (2, 2, 5)

のときそれぞれ ${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{216}$

(iii) (1, 2, 5), (1, 4, 5) のとき それぞれ $3!\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216}$

(i)(ii)(iii) は排反より 求める確率は

$$\frac{1}{216}\times1 + \frac{3}{216}\times5 + \frac{6}{216}\times2 = \frac{1+15+12}{216} = \frac{28}{216} = \boxed{\frac{7}{54}}$$ となる

3
$$\begin{cases} C: y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \\ l_1: y = -3x + 3 \\ l_2: y = x + 3 \end{cases}$$

(1) C と l_1 を連立にして

$ax^2 + bx + c = -3x + 3$ より

$ax^2 + (b+3)x + (c-3) = 0$ —① $(a \neq 0)$

これが重解をもつから 判別式を D_1 とすると $D_1 = 0$ より

$D_1 = (b+3)^2 - 4a(c-3) = 0$ —② である

また C と l_2 を連立にして

$ax^2 + bx + c = x + 3$ より

$ax^2 + (b-1)x + (c-3) = 0$ —③ $(a \neq 0)$

これが重解をもつから 判別式を D_2 とすると $D_2 = 0$ より

$D_2 = (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0$ —④ である

②−④ より $(b+3)^2 - (b-1)^2 = 0$ より

$6b + 9 + 2b - 1 = 0$

$8b = -8$

よって $\boxed{b = -1}$

これを②に代入して $4 - 4a(c-3) = 0$ より

$1 - ac + 3a = 0$ だから

$ac = 3a + 1$

$a \neq 0$ より $\boxed{c = 3 + \frac{1}{a}}$

(2) (1)より C は $y = ax^2 - x + 3 + \frac{1}{a}$ であるので

C が x 軸と異なる2点で交わるとき

$ax^2 - x + 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad (a \neq 0)$

の判別式を D とすると $D > 0$ より

$D = (-1)^2 - 4a\left(3 + \frac{1}{a}\right) > 0$ だから

$1 - 12a - 4 > 0$ より

$-3 > 12a$

$-1 > 4a$

この不等式をみたすとき $4a < 0$ より $a < 0$ だから

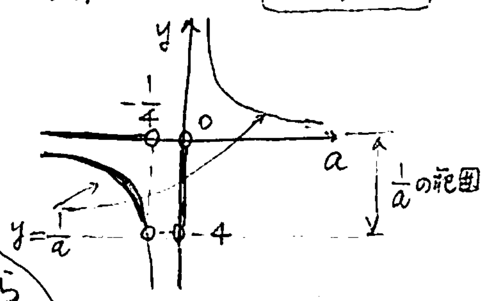
両辺 $a (< 0)$ で割ると $-\frac{1}{a} < 4$

両辺 -1 をかけて $\frac{1}{a} > -4$ また $a < 0$ でもあるから $\boxed{-4 < \frac{1}{a} < 0}$ となる

(別解) $a < -\frac{1}{4}$ であり

$y = \frac{1}{a}$ のグラフの $a < -\frac{1}{4}$

の部分を考えて $\boxed{-4 < \frac{1}{a} < 0}$



(3) $C: y = ax^2 - x + 3 + \frac{1}{a}$ より $\left(-4 < \frac{1}{a} < 0\right)$

$$y = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} + 3 + \frac{4}{4a}$$

$$= a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

よって頂点Rの座標は $\left(\frac{1}{2a}, \frac{3}{4a}+3\right)$

Cとl_1の連立式は①に $b=-1$, $c=3+\frac{1}{a}$ を代入して

$$ax^2 + 2x + \frac{1}{a} = 0$$ であり

この重解は $x = -\frac{1}{a}$ となる

$l_1: y = -3x+3$ より $y = \frac{3}{a}+3$, よって Pは $\left(-\frac{1}{a}, \frac{3}{a}+3\right)$

また Cとl_2の連立式は③に $b=-1$, $c=3+\frac{1}{a}$ を代入して

$$ax^2 - 2x + \frac{1}{a} = 0$$ であり

この重解は $x = \frac{1}{a}$ である

$l_2: y = x+3$ より $y = \frac{1}{a}+3$ よって Qは $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}+3\right)$ となる

ゆえに△PQRの重心をG(X, Y)とおくと

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{a} & \text{—⑤} \\ Y = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4a} + 3 + \frac{3}{a} + 3 + \frac{1}{a} + 3\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3+12+4}{4a} + 3 = \frac{19}{12} \times \frac{1}{a} + 3 & \text{—⑥} \end{cases}$$

⑤より $\frac{1}{a} = 6X$ であり これを⑥に代入して $Y = \frac{19}{12} \times 6X + 3$ より

$$Y = \frac{19}{2}X + 3$$

但し $-4 < \frac{1}{a} < 0$ より $-4 < 6X < 0$ だから $-\frac{2}{3} < X < 0$ となる

よって △PQRの重心Gは 直線 $y = \frac{19}{2}x + 3$ 上の $-\frac{2}{3} < x < 0$ 上をうごき

逆にこのすべてが求める軌跡となる

ゆえに $\boxed{\text{求める△PQRの重心Gの軌跡は 直線 } y = \frac{19}{2}x + 3 \text{ 上の } -\frac{2}{3} < x < 0 \text{ の部分となる}}$