

$$3 \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{にたいして}$$

$$(1) \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

また $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より $\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$ だから

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{4} \times 1 - \frac{1}{12} \times 1 = \frac{9-1}{12} = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos^2 x \sin x) \, dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x \, dx \\ &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \end{aligned}$$

よって $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$ が成り立つから

$$I_n + (n-1) I_n = (n-1) I_{n-2} \quad \text{より}$$

$$n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$n \neq 0 \text{ より} \quad \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{が成り立つ} \quad (n \geq 2)}$$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $0 \leq \sin x \leq 1$ であるから

自然数 m に対して $\sin^m x - \sin^{m+1} x$

$= (\sin^m x)(1 - \sin x) \geq 0$ がいなりたつので

$\sin^m x \geq \sin^{m+1} x$ がいなりたつ

よって 自然数 n に対し $1 \leq 2n-1 \leq 2n \leq 2n+1$ がいなりたつので

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x$ がいなりたつ

よって $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$

がいなりたつので $I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1}$ がいなりたつ ①

また、すべての自然数 n に対して $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\sin^n x > 0$ であるから $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx > 0$ である

よって ①より $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \geq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq 1$ がいなりたつ

また (2)より $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$ がいなりたつので

$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ がいなりたつ

よって $1 + \frac{1}{2n} \geq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq 1$ がいなりたつ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1$ より はさみうちの原理から

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ となる

$$(4) \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times I_{2n-4} = \dots$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times I_0 \quad \text{である}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{である}$$

$$\boxed{I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}} \quad \text{である}$$

$$\text{また } I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times I_{2n-3} = \dots$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times I_1 \quad \text{である}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{である}$$

$$\boxed{I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1} \quad \text{である}$$

$$(5) \quad I_{2n} I_{2n+1} = \left(\frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\times \left(\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 \right) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \quad \text{であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} I_{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{I_{2n} I_{2n+1}}} \times \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}} \times \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(2 + \frac{1}{n})}{1 \times \pi}} \times \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\pi}} \times 1 = \boxed{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \quad \text{である}$$

(3) より)

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} {}_{2n}C_n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \times \frac{(2n)!}{n! n!} \times \frac{1}{2^{2n} \cdot 2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \times \frac{\cancel{2n} \cdot (\cancel{2n}-1) \cdot (\cancel{2n}-2) \cdot (\cancel{2n}-3) \times \dots \times \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \times 1}{\{(\cancel{2n}) \cdot \cancel{2}(\cancel{n}-1) \cdot \cancel{2}(\cancel{n}-2) \times \dots \times \cancel{4} \cdot \cancel{2}\} (2n) \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times \dots \times 4 \times 2 \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \times \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \dots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times (2n-4) \times \dots \times 4 \times 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \times I_{2n} \times \frac{2}{\pi} \quad ((4) \text{ ㄝㄣ})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \times \frac{\pi}{2(2n+1)} \times \frac{1}{I_{2n+1}} \times \frac{2}{\pi} \quad ((5) \text{ ㄝㄣ})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \times \frac{1}{\sqrt{n} I_{2n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n} I_{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{1}{\pi}} \quad \text{ㄟㄜㄣ}$$

((6) ㄝㄣ)