

0 以上のすべての整数 n に対し, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I_2 および I_3 を求めよ.

(2) 2 以上のすべての整数 n に対し, 等式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成立することを示せ.

(3) 1 以上のすべての整数 n に対し, $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ が成立することを示し,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ を求めよ.

(4) I_{2n} および I_{2n+1} を求めよ.

(5) 等式 $\frac{1}{I_{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{I_{2n}I_{2n+1}}} \sqrt{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$ を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} I_{2n+1}}$ を求めよ.

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} {}_{2n}C_n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ を求めよ. ただし, ${}_nC_k$ は n 個から k 個取る組合せの総数を表す.

[’23 大阪教育大]