

4 (1) $f(x) = e^{2x} + 10se^{x+1} + 2e^2x$ より

$$f'(x) = 2e^{2x} + 10se^{x+1} + 2e^2$$

$$= 2 \left(e^{2x} + 5s \cdot \frac{t}{t^2+4t+9} e^{x+1} + e^2 \right)$$

ここで $u = e^x$ とおくと

$$f'(x) = 2 \left(u^2 + 5s \cdot \frac{t}{t^2+4t+9} \cdot eu + e^2 \right) \quad \text{より}$$

$$u^2 + 5s \cdot \frac{t}{t^2+4t+9} \cdot eu + e^2 = 0 \quad \text{より } \textcircled{*}$$

異なる2つの実数解 u をもたばよいため、(判別式) > 0 となる

$$\left(\frac{5te}{t^2+4t+9} \right)^2 - 4 \times e^2 > 0 \quad \text{より}$$

$$\left(\frac{5te}{t^2+4t+9} + 2e \right) \left(\frac{5te}{t^2+4t+9} - 2e \right) > 0$$

$$s > 0 \quad \frac{5te}{t^2+4t+9} < -2e \quad \text{or} \quad 2e < \frac{5te}{t^2+4t+9} \quad \text{より}$$

$$5t < -2(t^2+4t+9) \quad \text{or} \quad 2(t^2+4t+9) < 5t.$$

$$2t^2+13t+18 < 0 \quad \text{or} \quad 2t^2+3t+18 < 0$$

$$(t+2)(2t+9) < 0 \quad \text{or} \quad 2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 18 < 0$$

L ①

L ②

$$\textcircled{2} \text{ の解なし、} \textcircled{1} \text{ は } -\frac{9}{2} < t < -2$$

$$\text{よって } \boxed{\text{求める } t \text{ の範囲は } -\frac{9}{2} < t < -2}$$

(2) $f'(x) = 2(u^2 + 5seu + e^2) = 0$ の解を u_1, u_2

また $u_1 = e^{x_1}, u_2 = e^{x_2}$ とすると

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = -5se \quad \text{より} \quad e^{x_1} + e^{x_2} = -5se \\ u_1 u_2 = -e^2 \quad \text{より} \quad e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2} = -e^2 \end{cases}$$

$$\text{よって } x_1 + x_2 = 2$$

このとき $L = f(x_1) + f(x_2)$

$$= e^{2x_1} + e^{2x_2} + 10s(e^{x_1+1} + e^{x_2+1}) + 2e^2(x_1 + x_2)$$

$$= (e^{x_1})^2 + (e^{x_2})^2 + 10se(e^{x_1} + e^{x_2}) + 2e^2 \cdot 2$$

$$\text{よって } e^{x_1} + e^{x_2} = -5se \quad \text{より} \quad e^{2x_1} + e^{2x_2} + 2e^{x_1} \cdot e^{x_2} = 25s^2e^2$$

$$\text{よって } (e^{x_1})^2 + (e^{x_2})^2 = 25s^2e^2 - 2e^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{ゆえに } L &= 25s^2e^2 - 2e^2 + 10se \cdot (-5se) + 4e^2 \\
 &= 25s^2e^2 - 2e^2 - 50s^2e^2 + 4e^2 \\
 &= 2e^2 - 25s^2e^2 \\
 &= \boxed{(2-25s^2)e^2} \text{ となる}
 \end{aligned}$$

(3) s^2 が最大のとき L は最小となる

$$\text{よって } s = \frac{t}{t^2+4t+9} = \frac{1}{t+\frac{9}{t}+4} \quad \text{ここで } t \text{ は負より相加相乗の関係から}$$

$$s = \frac{1}{-(-t+\frac{9}{-t})+4} \leq \frac{1}{-2\sqrt{(-t) \times (\frac{9}{-t})}+4} = \frac{1}{-2 \times 3 + 4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{等号は } -t = \frac{9}{-t} \text{ より } (-t)^2 = 9 \text{ から}$$

$$-t = 3 \text{ よって } \boxed{t = -3 \text{ のとき}}$$

$$\text{このとき } \boxed{L \text{ は最小値}} \quad (2-25 \times \frac{1}{9})e^2 = \boxed{-\frac{17}{9}e^2} \text{ となる}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad I &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (e^{2x} + 10se^{x+1} + 2e^2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 10se^{x+1} + e^2x^2 \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= \frac{1}{2}(e^{2x_2} - e^{2x_1}) + 10se \cdot (e^{x_2} - e^{x_1}) + e^2(x_2^2 - x_1^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } u_1 + u_2 = -5se = -5 \times (-\frac{1}{2})e = \frac{5}{2}e$$

$$u_1 u_2 = e^2 \text{ より}$$

$$u_1, u_2 \text{ は } x^2 - \frac{5}{2}ex + e^2 = 0 \text{ の解だから}$$

$$2x^2 - 5ex + 2e^2 = 0 \text{ より}$$

$$(2x - e)(x - 2e) = 0$$

$$\text{よって } x = \frac{e}{2}, 2e$$

またここで * の2次の5乗根正で $u = e^x$ は単調増加だから $f(x)$ は

u	...	$\frac{e}{2}$	...	$2e$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		極大		極小	

$$u = \frac{e}{2} \text{ で極大, } u = 2e \text{ で極小である}$$

$$\text{よって } u_1 = \frac{e}{2} \text{ で極大, } u_2 = 2e \text{ で極小より}$$

$$e^{x_1} = \frac{1}{2}e \text{ で極大, } e^{x_2} = 2e \text{ で極小となる}$$

$$\text{また } x_1 = \log \frac{e}{2} = 1 - \log 2$$

$$x_2 = \log 2e = 1 + \log 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex 7 } I &= \frac{1}{2} \{ (e^{x_2})^2 - (e^{x_1})^2 \} + 10 \times (-\frac{1}{2}) e (e^{x_2} - e^{x_1}) + e^2 (x_2^2 - x_1^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(4e^2 - \frac{1}{4}e^2 \right) - 5e \left(2e - \frac{1}{2}e \right) + e^2 \{ (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} e^2 - 5e \times \frac{3}{2} e + e^2 (2 \times 2 \log 2) \\
 &= \left(\frac{15}{8} - \frac{15}{2} + 4 \log 2 \right) e^2 \\
 &= \boxed{\left(-\frac{45}{8} + 4 \log 2 \right) e^2} \quad \text{Ans}
 \end{aligned}$$