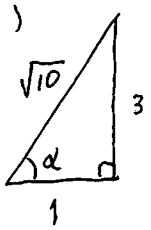
(1)



$\tan\alpha = 3 \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$I = \int_1^3 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ とするとき.

$x=\tan\theta$ とおくと $dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$,
$\begin{array}{c|c} x & 1 \cdots 3 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} \cdots \alpha \end{array}$ だから

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

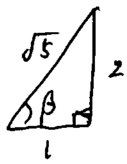
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \cos^2\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

$n \geqq 2$ のとき.

(2)
$I_n = \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$ とおく.. $\tan\beta = 2 \quad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと.



$x = \tan\theta$ とすると, $dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$,
$\begin{array}{c|c} x & 1 \cdots 2 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} \cdots \beta \end{array}$ だから

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} \frac{\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^n}\cdot(1+\tan^2\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} \frac{\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}}\,d\theta$$ である.

ここで $t = \tan^2\theta$ とおくと

$$dt = 2\tan\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 2\tan\theta\cdot(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$ より

$$d\theta = \frac{dt}{2\tan\theta\,(1+\tan^2\theta)}$$, $\begin{array}{c|c} \theta & \frac{\pi}{4} \cdots \beta \\ \hline t & 1 \cdots 4 \end{array}$.

よって $$I_n = \int_1^4 \frac{\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}}\cdot\frac{dt}{2\tan\theta\,(1+\tan^2\theta)}$$

$$= \int_1^4 \frac{dt}{2(1+t)^n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-n+1}(1+t)^{-n+1}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-n}\left(5^{1-n} - 2^{1-n}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2(n-1)}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}}$$ となる

(3) $1 \leqq x \leqq 2$ において

$$0 < \frac{1}{(1+x^2)^n} \leqq \frac{x}{(1+x^2)^n}$$ がなりたつので

$$0 < \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n \leqq 2^n \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}$$ がなりたつ

よって $$0 < \int_1^2 \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n dx < 2^n \cdot \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^n} dx$$ がなりたつ

ここで (2)より $n \geqq 2$ のとき $$\lim_{n \to \infty} \left\{ 2^n \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^n} dx \right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ 2^n \times \frac{1}{2(n-1)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n-1} \times \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= 0 \times (1-0) = 0$$ となるから

はさみうちの原理より $$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_1^2 \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n dx = 0}$$ となる