

(1) $-1 \leq x \leq 1$ で $f(x) + f(-x) \geq 2f(0)$ が成り立つから

$$\int_{-1}^1 \{f(x) + f(-x)\} dx \geq \int_{-1}^1 2f(0) dx \text{ より}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx \geq [2f(0)x]_{-1}^1 \text{ である. } \text{--- ①}$$

よって $\int_{-1}^1 f(-x) dx$ において $t = -x$ とおくと $dt = -dx$, $\frac{x}{t} \left| \begin{smallmatrix} -1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & -1 \end{smallmatrix} \right|$ より

$$\int_{-1}^1 f(-x) dx = \int_1^{-1} f(t) \cdot (-dt) = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ であるから}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx = 2 \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ である}$$

$$\text{また } [2f(0)x]_{-1}^1 = 2f(0) \times (1 - (-1)) = 4f(0) \text{ である}$$

よって ①式より $2 \int_{-1}^1 f(x) dx \geq 4f(0) \text{ より}$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \geq 2f(0) \text{ となる}$$

よって $u-2 = x$ とおくと $dx = du$, $\frac{x}{u} \left| \begin{smallmatrix} -1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 3 \end{smallmatrix} \right|$ である

$$\int_1^3 f(u-2) du \geq 2f(0) \text{ が成り立つから}$$

$$\boxed{\int_1^3 f(x-2) dx \geq 2f(0) \text{ が成り立つ}} \text{ --- ②}$$

(2) $e \in \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$ であるから 1 より大きい実数とする.

よって $f(x-2) = \frac{1}{x}$ とおくと $f(0) = f(2-2) = \frac{1}{2}$ である,

また $u = x-2$ とおくと $f(u) = \frac{1}{u+2}$ は $-1 \leq u \leq 1$ で連続であるから

②より $\int_1^3 f(x-2) dx \geq 2f(0)$ であるから

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx \geq 2f(0) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ である}$$

よって $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$ より $\int_1^3 \frac{1}{x} dx \geq \int_1^e \frac{1}{x} dx$ が成り立つので

$$\boxed{3 \geq e \text{ が成り立つ}}$$