(1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ のとき $f'(x)=\dfrac{1\times(x^2+3)-x\times 2x}{(x^2+3)^2}$

$$=\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$$

よって $f'(1)=\dfrac{-1^2+3}{(1^2+3)^2}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$, $f(1)=\dfrac{1}{1^2+3}=\dfrac{1}{4}$ であることから

A$(1, f(1))$ での接線lは $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ より

$$y=\frac{1}{8}(x-1)+\frac{1}{4}$$

よって $y=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}$ であり $g(x)=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}$ である

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立にすると $\dfrac{x}{x^2+3}=\dfrac{1}{8}(x+1)$ より

$$8x=(x^2+3)(x+1)$$

$$x^3+x^2-5x+3=0$$

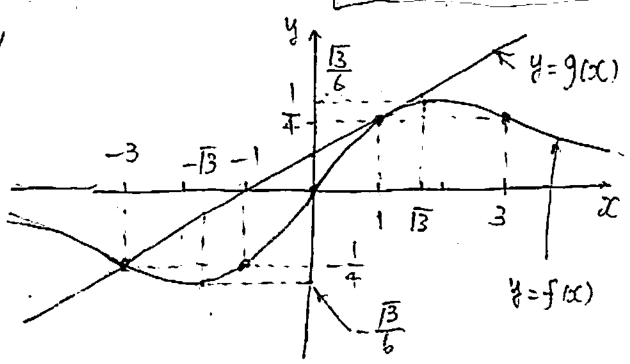
1	1	1	-5	3
		1	2	-3
1	1	2	-3	0
		1	3	
	1	3	0	

よって $(x-1)^2(x+3)=0$ となって

$x=1$ (重解), -3 をもち, 他の解はない

$f(-3)=g(-3)=\dfrac{-3}{9+3}=\dfrac{1}{8}(-3+1)=-\dfrac{1}{4}$ であり

$\boxed{\text{Aと異なる共有点は } \left(-3, -\tfrac{1}{4}\right) \text{ のみである, } x\text{座標は } x=-3}$



$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+3)^2-(-x^2+3)\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{-2x\{(x^2+3)+2(-x^2+3)\}}{(x+3)^3}$$

$=\dfrac{2x(x^2-9)}{(x+3)^2}$ より $y=f(x)$, $y=g(x)$ の概形は左図

(2) 求める定積分の値を I とすると

$$I=\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2dx$$

$=\displaystyle\int_{-3}^{1}\left\{\frac{x^2}{(x^2+3)^2}-\frac{1}{4}\times\frac{x(x+1)}{x^2+3}+\frac{1}{64}(x+1)^2\right\}dx$ である

ここで $I_1=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$ ，$I_2=\int_{-3}^{1}\frac{1}{4}\times\frac{x^2+x}{x^2+3}dx$ ，$I_3=\int_{-3}^{1}\frac{1}{64}(x+1)^2dx$ とする：

I_1 について　$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$dx=\sqrt{3}\times\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ ，

x	$-3\cdots\cdots1$
θ	$-\frac{\pi}{3}\cdots\cdots\frac{\pi}{6}$

だから

$$I_1=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\tan^2\theta}{3^2(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^2\theta}{\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)}d\theta \qquad \left(\frac{1}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta+1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\tan^2\theta+1)-1}{\tan^2\theta+1}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\times\sqrt{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}\pi-3}{12}}$$

また I_2 について　同様に $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおいて

$$I_2=\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\frac{x^2+3+x-3}{x^2+3}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\left(1+\frac{x-3}{x^2+3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}[x]_{-3}^{1}+\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\frac{x-3}{x^2+3}dx$$

$$=\frac{1}{4}\times(1+3)+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\tan\theta-3}{3(\tan^2\theta+1)}\times\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=1+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(\tan\theta-\sqrt{3})d\theta$$

$$=1+\frac{1}{4}\left[-\log|\cos\theta|-\sqrt{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=1-\frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=1+\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi+\frac{1}{4}\log3^{-\frac{1}{2}}=\boxed{1-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi-\frac{1}{8}\log3}$$

また　$I_3 = \int_{-3}^{1} \frac{1}{64}(x+1)^2 dx = \left[\frac{1}{3\times 64}(x+1)^3 \right]_{-3}^{1}$

$$= \frac{1}{3\times 64}\left\{ 2^3 - (-2)^3 \right\} = \frac{16}{3\times 64} = \boxed{\frac{1}{12}}$$ である

よって、求める定積分の値 I は

$$I = I_1 - I_2 + I_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{1}{8}\log 3\right) + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{2+3}{24}\sqrt{3}\pi + \frac{-3-12+1}{12} + \frac{1}{8}\log 3$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{3}\pi}{24} - \frac{7}{6} + \frac{1}{8}\log 3}$$ となる