

$$(1) f(x) = \frac{2e^{3x}}{e^{2x}+1} \text{ のとき}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times 3 e^{3x} \cdot (e^{2x}+1) - 2e^{3x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{2e^{3x}(3e^{2x}+3-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{3x}(e^{2x}+3)}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$

よって $f(x)$ は単調増加であるから、 $a < b$ ならば $f(a) < f(b)$ になり、

$$\text{また } f(\log \sqrt{3}) = \frac{2e^{3\log \sqrt{3}}}{e^{2\log \sqrt{3}}+1} = \frac{2e^{\log 3^{\frac{3}{2}}}}{e^{\log 3}+1} = \frac{2 \times 3^{\frac{3}{2}}}{3+1} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

(2) 求める定積分の値を I とおくと

$$I = \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x) dx \text{ であり } t = g(x) \text{ のとき } x = f(t) \text{ だから}$$

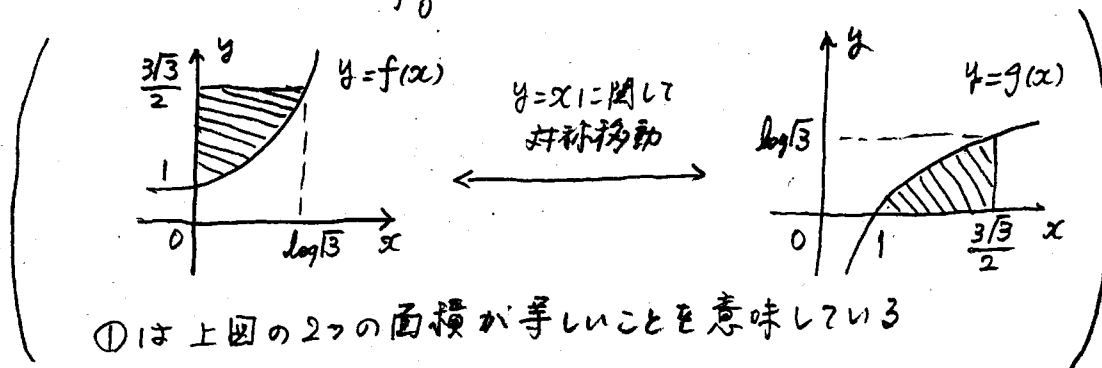
$$\frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \cdots \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \hline t & 0 \cdots \log \sqrt{3} \end{array}$$

$$(f(0) = \frac{2 \times 1}{1+1} = 1 \text{ より, } 0 = g(1))$$

$$\text{よって } I = \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x) dx = \int_0^{\log \sqrt{3}} t \cdot f'(t) dt$$

$$= [t f(t)]_0^{\log \sqrt{3}} - \int_0^{\log \sqrt{3}} f(t) dt$$

$$= (\log \sqrt{3}) \times \frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\log \sqrt{3}} f(t) dt \quad \text{--- ① とする}$$



$$\text{①より } I = \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{2e^{3x}}{e^{2x}+1} dx$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - \int_0^{\log \sqrt{3}} \left(2e^x - \frac{2e^x}{e^{2x}+1} \right) dx$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - 2[e^x]_0^{\log \sqrt{3}} + \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - 2(e^{\log \sqrt{3}} - e^0) + \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 + 2 \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$$

$$\left(e^{2x}+1 \right) \sqrt{\frac{2e^{3x}}{2e^{3x}+2e^x}} \cdot \frac{2e^x}{-2e^x}$$

$\therefore \text{c)} J = \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ とおき、 $t = e^x$ とおくと $dt = e^x dx$

x	0	$\dots$	$\log \sqrt{3}$
t	1	$\dots$	$\sqrt{3}$

 したがって

$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt$ とあり $t = \tan \theta$ とおくと
 $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ より
 $\frac{dt}{1+t^2} = d\theta$,

t	1	$\dots$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$

 したがって

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

したがって $I = \boxed{\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x) dx} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2} \log \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{6}}$ となる