$S_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ において

(1) $S_1 = \int_1^e \log x \, dx = \int_1^e x' \log x \, dx$

$= \left[x \log x \right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$

$= e \log e - \left[x \right]_1^e$

$= e - e + 1 = \boxed{1}$

(2) $\boxed{S_{n+1}} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx$

$= \int_1^e x' (\log x)^{n+1} dx$

$= \left[x (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x \times (n+1)(\log x)^n \times \frac{1}{x} dx$

$= e (\log e)^{n+1} - 0 - (n+1) \int_1^e (\log x)^n dx$

$= \boxed{e - (n+1) S_n}$

(3) $1 \leqq x \leqq e$ で $(\log x)^n \geqq 0$ より $S_n = \int_1^e (\log x)^n dx > 0$ である

よって $S_{n+1} = e - (n+1) S_n > 0$ であるから

$S_n < \frac{e}{n+1}$

ゆえに $0 < S_n < \frac{e}{n+1}$ がなりたち

$\lim_{n \to \infty} \frac{e}{n+1} = 0$ であるから、はさみうちの原理より $\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = 0}$ となる

(4) $S_{n+1} = e - n S_n - S_n$ より

$n S_n = e - S_{n+1} - S_n$ がなりたち

(3) より $\lim_{n \to \infty} S_{n+1} = \lim_{n \to \infty} S_n = 0$ だから

$\boxed{\lim_{n \to \infty} n S_n} = \lim_{n \to \infty} (e - S_{n+1} - S_n) = e - 0 - 0 = \boxed{e}$ となる