自然数 n に対して, $S_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ とする.このとき以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 を求めよ.
- (2) S_{n+1} を S_n と n の式で表せ.
- (3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ. (4) $\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ.

['18 大阪府立大]