

n を自然数とする．関数 $f(x)$ ($x \geq 0$) を単調に増加する連続関数とする． k を 0 以上の整数としたとき， $x_k = \frac{\pi k}{2n}$ ， $S_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cos^2 nx \, dx$ とする．次の問いに答えよ．

- (1) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos^2 nx \, dx$ を求めよ．
- (2) S_k が不等式 $\frac{\pi}{4n} f(x_k) \leq S_k \leq \frac{\pi}{4n} f(x_{k+1})$ を満たすことを示せ．
- (3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$ とする． $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos^2 nx \, dx$ を I で表せ．
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 nx - \cos^4 nx) \log \left(1 + \frac{4}{\pi} x \right) dx$ を求めよ． [’17 同志社大]