(1) $I=\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx$ とし　$x=\pi-t$ とおくと

$dx=-dt$ ，
x	$0 \cdots \pi$
t	$\pi \cdots 0$

より

$$I=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-dt)$$

$$=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)\,dt-\int_0^{\pi}t f(\sin t)\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\,dt-I$$ となるから

$$2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\,dt$$ より

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin t)\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx$$ となる

よって $\boxed{\int_0^{\pi}x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx}$ がなりたつ

(2) $J=\int_0^{\pi}\frac{x(a^2-4\cos^2 x)\sin x}{a^2-\cos^2 x}\,dx$ とおくと

$$J=\int_0^{\pi}\frac{x\{a^2-4(1-\sin^2 x)\}\sin x}{a^2-(1-\sin^2 x)}\,dx$$ であるから

$$f(\sin x)=\frac{(a^2-4+4\sin^2 x)\sin x}{a^2-1+\sin^2 x}$$ とおくことにより

$a>1$よりこの分母はゼロにならないので、この関数は連続であるから、(1) を利用すると

$$J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a^2-4\cos^2 x)\sin x}{a^2-\cos^2 x}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\{4(a^2-\cos^2 x)-3a^2\}\sin x}{a^2-\cos^2 x}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}4\sin x\,dx-\frac{\pi}{2}\times 3a^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{a^2-\cos^2 x}\,dx$$

$$=2\pi\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}-\frac{3a^2}{2}\pi\times\frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\left(-\frac{-\sin x}{a+\cos x}+\frac{\sin x}{a-\cos x}\right)dx$$

$$=2\pi\{-(-1)+1\}-\frac{3a}{4}\pi\Big[-\log|a+\cos x|+\log|a-\cos x|\Big]_0^{\pi}$$

$$=4\pi-\frac{3a}{4}\pi\{-\log(a-1)+\log(a+1)+\log(a+1)-\log(a-1)\}$$

($a>1$ より)

$$=4\pi-\frac{3a}{2}\pi\{\log(a+1)-\log(a-1)\}$$

$$=\boxed{\pi\left(4-\frac{3a}{2}\log\left|\frac{a+1}{a-1}\right|\right)}$$ となる