$f_{n,k}(x) = {}_nC_k x^k (1-x)^{n-k}$, $\quad S_{n,k} = \int_0^1 f_{n,k}(x)\,dx$ のとき

(1) $S_{n,0} = \int_0^1 f_{n,0}(x)\,dx = \int_0^1 {}_nC_0\, x^0 (1-x)^{n-0} dx$

$$= \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

(2) $S_{n,k} = \int_0^1 f_{n,k}(x)\,dx = \int_0^1 {}_nC_k\, x^k (1-x)^{n-k} dx$

$$= {}_nC_k \int_0^1 \left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)' (1-x)^{n-k} dx$$

$$= {}_nC_k \times \frac{1}{k+1} \left\{ \left[x^{k+1}(1-x)^{n-k} \right]_0^1 - \int_0^1 x^{k+1} \cdot (n-k)\{-(1-x)^{n-(k+1)}\} dx \right\}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)}{k+1} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)} dx$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\{n-(k+1)\}!} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)} dx$$

$$= \int_0^1 {}_nC_{k+1}\, x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)} dx$$

$= S_{n,k+1}$ がなりたつ

よって $\boxed{S_{n,k}} = S_{n,0} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$ がなりたつ

(3) $V_{n,k} = \pi \int_0^1 \{f_{n,k}(x)\}^2 dx$

$$= \pi \int_0^1 ({}_nC_k)^2 x^{2k}(1-x)^{2n-2k} dx$$

$$= \pi \cdot ({}_nC_k)^2 \cdot \frac{1}{{}_{2n}C_{2k}} \cdot \int_0^1 {}_{2n}C_{2k}\, x^{2k}(1-x)^{2n-2k} dx$$

$$= \pi \cdot ({}_nC_k)^2 \times \frac{1}{{}_{2n}C_{2k}} \times S_{2n,2k}$$

同様に $V_{n,k+1} = \pi \cdot ({}_nC_{k+1})^2 \times \frac{1}{{}_{2n}C_{2(k+1)}} \times S_{2n,2(k+1)}$ であり

(1)より $S_{2n,2k} = S_{2n,2(k+1)} = \frac{1}{2n+1}$ で等しいから

$$\frac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}} = \frac{\pi \cdot ({}_nC_{k+1})^2 \cdot {}_{2n}C_{2k}}{{}_{2n}C_{2k+2} \cdot \pi \cdot ({}_nC_k)^2}$$

$$= \left\{ \frac{\cancel{n!}}{(k+1)!(n-(k+1))!} \right\}^2 \times \frac{\cancel{(2n)!}}{(2k)!(2n-2k)!} \times \frac{(2k+2)!\{2n-(2k+2)\}!}{\cancel{(2n)!}} \times \left(\frac{k!(n-k)!}{\cancel{n!}} \right)^2$$

$$= \frac{(n-k)^2 \cdot (2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2 (2n-2k)(2n-2k-1)}$$

$$= \frac{(n-k)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cancel{(k+1)}(2k+1)}{(k+1)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cancel{(n-k)}(2n-2k-1)} = \boxed{\frac{(2k+1)(n-k)}{(k+1)(2n-2k-1)}}$$ となる

(4) nが偶数のとき $n=2m$ （mは自然数）とおけるから

$$\frac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}} = \frac{V_{2m,k+1}}{V_{2m,k}} = \frac{(2k+1)(2m-k)}{(k+1)(4m-2k-1)}$$ であり.

$\dfrac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}} > 1$ をとくと $V_{n,k}$ はすべての $0 \leqq k \leqq n$ の k で正となるから

$V_{n,k+1} > V_{n,k}$ より

$(2k+1)(2m-k) > (k+1)(4m-2k-1)$ をみたす.

よって $\cancel{-2k^2} + (4m-1)k + 2m > \cancel{-2k^2} + (4m-1-2)k + 4m-1$. より

$$2k > 2m-1$$

$$k > m - \frac{1}{2}.$$

同様に $\dfrac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}} < 1$ をとくと $k < m - \dfrac{1}{2}$ となる.

ゆえに $\begin{cases} k = 0, 1, 2, \cdots, m-1 \text{ のとき} & V_{n,k} < V_{n,k+1} . \\ k = m, m+1, \cdots, n \text{ のとき} & V_{n,k} > V_{n,k+1} \end{cases}$ となるので

$$V_{n,0} < V_{n,1} < V_{n,2} < \cdots < V_{n,m-1} < V_{n,m} > V_{n,m+1} > V_{n,m+2} > \cdots > V_{n,n}.$$

がなりたつ.

よって $\boxed{V_{n,m} = V_{n,\frac{n}{2}} \text{ が最小値となるので, そのときの } k \text{ の値は } k = \frac{n}{2} \text{ となる}}$