(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3(1-x)}=\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_3}{x^3}+\dfrac{b}{1-x}$ とおくと

$$\frac{1}{x^3(1-x)}=\frac{a_1x^2(1-x)+a_2x(1-x)+a_3(1-x)+bx^3}{x^3(1-x)}$$

$$=\frac{(b-a_1)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_2-a_3)x+a_3}{x^3(1-x)}$$ となる

この分子の係数を比較して

$$\begin{cases}0=b-a_1\\0=a_1-a_2\\0=a_2-a_3\\1=a_3\end{cases} \text{より} \begin{cases}a_1=b\\a_2=a_1\\a_3=a_2\\a_3=1\end{cases}$$ だから

$\boxed{a_1=a_2=a_3=b=1}$ となる

(2) $$\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$=\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2}-\log|1-x|+C$$

$$=\boxed{\log\left|\frac{x}{1-x}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C\ \ (C\text{は積分定数})}$$ となる

(3) $\dfrac{1}{x^p(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^p}+\dfrac{1}{1-x}$ —① と類推できるので

これを数学的帰納法で示す

(i) $p=1$ のとき (①の右辺) $=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$

$$=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x(1-x)}=(\text{①の左辺})$$ より

$p=1$ のとき ① はなりたつ

(ii) $p=k$ (kは自然数) のとき、① がなりたつとすると

$\dfrac{1}{x^k(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^k}+\dfrac{1}{1-x}$ がなりたち —②

$p=k+1$ のとき (①の右辺) $=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^k}+\dfrac{1}{x^{k+1}}+\dfrac{1}{1-x}$

$$=\frac{1}{x^k(1-x)}+\frac{1}{x^{k+1}}\quad(\text{②より})$$

$$=\frac{x+(1-x)}{x^{k+1}(1-x)}=\frac{1}{x^{k+1}(1-x)}=(\text{①の右辺})$$

となるから $p=k+1$ のときも ① はなりたつ

ゆえにすべての自然数 p で $\dfrac{1}{x^p(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^p}+\dfrac{1}{1-x}$ はなりたつ

よって　pが2以上の自然数のとき

$$\int \frac{dx}{x^p(1-x)} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$= \log|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} - \cdots - \frac{1}{p-1} \times \frac{1}{x^{p-1}} - \log|1-x| + C$$

$$= \boxed{\log\left|\frac{x}{1-x}\right| - \frac{1}{1} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2} - \cdots - \frac{1}{p-1} \times \frac{1}{x^{p-1}} + C}$$

（Cは積分定数）

p = 1のとき

$$\int \frac{dx}{x^p(1-x)} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \log|x| - \log|1-x| + C$$

$$= \boxed{\log\left|\frac{x}{1-x}\right| + C}$$

（Cは積分定数）

となる