

$$B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \text{ において}$$

$$(1) B(3, 2) = \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx \\ = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30-48+20}{120} = \frac{2}{120} = \boxed{\frac{1}{60}}$$

$$(2) \boxed{B(m, n)} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \\ = \int_0^1 \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)' (1-x)^n dx \\ = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \times (1-x)^n \right]_0^1 - \frac{1}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} \times n(1-x)^{n-1} (-1) dx \\ = 0 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx \\ = \boxed{\frac{n}{m+1} B(m+1, n-1)} \text{ である (但し } m \geq 1 \text{)}$$

$$(3) (2) \text{より } B(m, n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) \text{ である}$$

$$\frac{B(m, n)}{n} = \frac{B(m+1, n-1)}{m+1} \text{ であり、両辺 } m! (n-1)! \text{ をかけると}$$

$$\frac{B(m, n)}{m! n!} = \frac{B(m+1, n-1)}{(m+1)! (n-1)!} \text{ かつなりたつ$$

$$\text{よって } \frac{B(m, n)}{m! n!} = \frac{B(m+n, n-n)}{(m+n)! (n-n)!} \text{ かつなりたつのである } ((m-n)! = 0! = 1)$$

$$B(m, n) = \frac{m! n!}{(m+n)!} \times B(m+n, 0) \text{ かつなりたつ$$

$$\therefore \text{である } B(m+n, 0) = \int_0^1 x^{m+n} (1-x)^0 dx = \int_0^1 x^{m+n} dx = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+n+1} \text{ である}$$

$$\boxed{B(m, n)} = \frac{m! n!}{(m+n)!} \times \frac{1}{(m+n+1)} = \boxed{\frac{m! n!}{(m+n+1)!}} \text{ である}$$

$$(4) I = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx \text{ とおく}$$

xy 平面上で $(a, 0), (b, 1)$ を通る直線を考えよ

$$y = \frac{1}{b-a} (x-a) \text{ である}$$

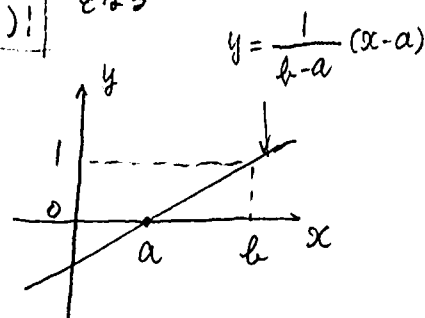
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b-a} \text{ より } dx = (b-a) dy, \quad \begin{array}{c|c} x & a \dots b \\ \hline y & 0 \dots 1 \end{array} \text{ である}$$

$$(b-a)y = x-a \text{ より } x = a + (b-a)y \text{ である}$$

$$x-b = a + (b-a)y - b$$

$$= a(1-y) - b(1-y)$$

$$= -(b-a)(1-y)$$



$$\text{Ex 7 } I = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx$$

$$= \int_0^1 \{ (b-a)y \}^m \{ -(b-a)(1-y) \}^n (b-a) dy$$

$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 y^m (1-y)^n dy$$

$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \times B(m, n)$$

$$= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \times \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \quad \text{Ex 7}$$

$$\boxed{\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx = (-1)^n \times \frac{m! n!}{(m+n+1)!} (b-a)^{m+n+1}} \quad \text{Ex 7.3}$$