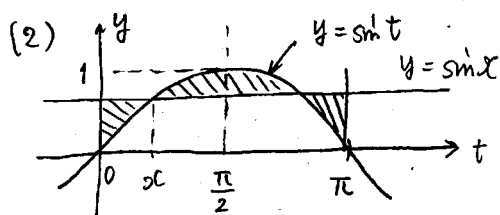


$$(1) f(0) = \int_0^{\pi} |\sin t - \sin 0| dt = \int_0^{\pi} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = \boxed{2}$$



横軸を t として, $y = \sin t$, $y = \sin x$ のグラフを考えると左のようになり, $f(x)$ は斜線部の面積を表す. 2つのグラフは $t = \frac{\pi}{2}$ に関して対称であることから

$$f(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - \sin x| dx \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= 2 \left(\int_0^x (\sin x - \sin t) dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \sin x) dx \right) \\ &= 2 \left([(\sin x)t + \cos t]_0^x + [-\cos t - (\sin x)t]_x^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= 2 \left(x \sin x + \cos x - \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x + x \sin x \right) \\ &= \boxed{4x \sin x + 4 \cos x - \pi \sin x - 2} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = (4x - \pi) \sin x + 4 \cos x - 2$ より

$$f'(x) = 4 \sin x + (4x - \pi) \cos x - 4 \sin x$$

$$= (4x - \pi) \cos x \quad \therefore 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ で } f'(x) = 0 \text{ をとくと } x = \frac{\pi}{4}$$

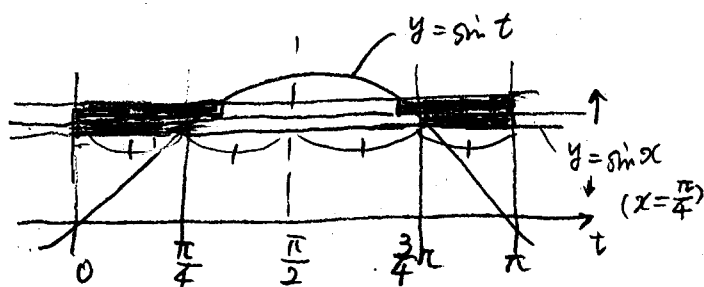
よって $f(x)$ の増減表は次のようになる

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	最小	↗	

$x = \frac{\pi}{4}$ で $f(x)$ は最小となり

$$\begin{aligned} \text{その値は } f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(4 \times \frac{\pi}{4} - \pi\right) \sin \frac{\pi}{4} + 4 \cos \frac{\pi}{4} - 2 \\ &= 0 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \\ &= \boxed{2\sqrt{2} - 2} \text{ となる} \end{aligned}$$

「はみだし削り論法」



$y = \sin x$ を $x = \frac{\pi}{4}$ で考えると左の
 $\blacksquare$ と $\square$ の面積は等しい. そこから
 $y = \sin x$ を上に上げても下に下げても
 $f(x)$ (面積) は増えることになり
 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{4}$ で最小となる

↑ $y = \sin \frac{\pi}{4}$ のラインを上にあげると面積は
 $\blacksquare$ が増え $\square$ が減る分だけ
 増える方が多い