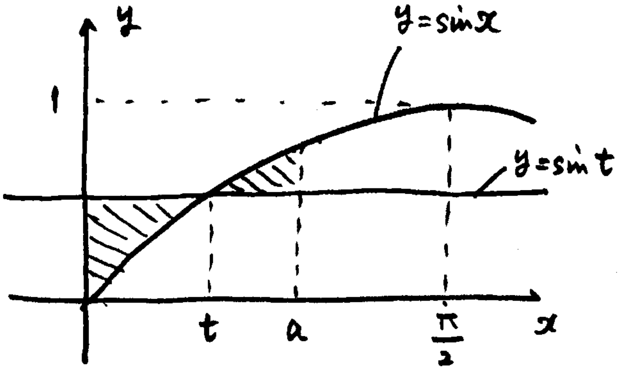

(1) $f(t)$ は左図の斜線部の面積を表し

$$f(t)=\int_0^t(-\sin x+\sin t)\,dx+\int_t^a(\sin x-\sin t)\,dx$$

$$=\Big[\cos x+(\sin t)\cdot x\Big]_0^t+\Big[-\cos x-(\sin t)\cdot x\Big]_t^a$$

$$=\cos t+t\sin t-1-\cos a-a\sin t+\cos t+t\sin t$$

$$=\boxed{2\cos t+2t\sin t-a\sin t-\cos a-1}$$ となる

(2) $f'(t)=\cancel{-2\sin t}+\cancel{2\sin t}+2t\cos t-a\cos t$

$=(2t-a)\cos t$ であるから $f(t)$ の $0<t<a$ での増減表は以下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	a
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	最小	↗	

よって $f(t)$ は $t=\frac{a}{2}$ で最小値をとり

この値が $g(a)$ であるので

$$g(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)=2\cos\frac{a}{2}+\cancel{2\times\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}}\cancel{-a\sin\frac{a}{2}}-\cos a-1$$

$$=\boxed{2\cos\frac{a}{2}-\cos a-1}$$ となる

(3)
$$\lim_{a\to+0}\frac{g(a)}{a^2}=\lim_{a\to+0}\frac{2\cos\frac{a}{2}-\cos a-1}{a^2}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{2\cos\frac{a}{2}-\left(2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)-1}{a^2}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{2\cos\frac{a}{2}\left(1-\cos\frac{a}{2}\right)}{a^2}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{2\cos\frac{a}{2}\left(1-\cos\frac{a}{2}\right)\left(1+\cos\frac{a}{2}\right)}{a^2\left(1+\cos\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{2\cos\frac{a}{2}\left(1-\cos^2\frac{a}{2}\right)}{a^2\left(1+\cos\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{2\cos\frac{a}{2}}{1+\cos\frac{a}{2}}\times\left(\frac{\sin\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2\times1}{1+1}\times1^2\times\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$ となる