

(1) $f(x) = x^{n+1}e^{-x}$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)x^n e^{-x} + x^{n+1}(-e^{-x}) \\ &= \{(n+1) - x\} x^n e^{-x} \end{aligned}$$

よって $f(x)$ の増減表は左のようになり

x	0	...	$n+1$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	最大	↘

$x = n+1$ で $f(x)$ は最大値をとり

その値は $f(n+1) = (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}$

$$= \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \quad \text{と表す}$$

(2) $x > 0$ のとき $f(x) = x^{n+1}e^{-x}$ は明らかに正であり

また $f(x)$ の最大値が $\left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1}$ であることから

$$0 < x^{n+1}e^{-x} \leq \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \quad \text{かなりたつ}$$

すべての x を $x(>0)$ で割ると

$$0 < x^n e^{-x} \leq \frac{1}{x} \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \quad \text{かなりたつ}$$

ここでも $\left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1}$ は定数より $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} = 0$ であるから

はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ かなりたつ

(3) 「すべての自然数 n について、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = n!$ 」を ① とする

また、 $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ とおくと

(i) $n=1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} I_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^1 e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t (-e^{-t})' dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left([t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x(-e^{-x}) - [e^{-t}]_0^x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x e^{-x} - \frac{1}{e^x} + 1 \right)$$

$$= 0 - 0 + 1 = 1! \quad ((2)より \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0)$$

よって $n=1$ のとき ① はなりたつ。

(ii) $n = k$ (k は自然数) で ① がなりたつとすると

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_k(x) = k! \quad \text{がなりたつ}$$

こゝで $n = k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} I_{k+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^{k+1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^{k+1} (-e^{-t})' dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left([t^{k+1} \cdot (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (k+1)t^k \cdot (-e^{-t}) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x^{k+1} e^{-x} + (k+1) \int_0^x t^k e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x^{k+1} e^{-x} + (k+1) I_k(x) \right) \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$$\text{こゝで (2) より } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k+1} e^{-x} = 0$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} I_k(x) = k! \quad \text{であるから}$$

$$(\text{①式}) = 0 + (k+1) \times k! = (k+1)! \quad \text{となる}$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} I_{k+1}(x) = (k+1)! \quad \text{より } n = k+1 \text{ のときも ① はなりたつ}$$

(i) より すべての自然数 n で ① がなりたつから

$$\text{すべての自然数 } n \text{ で } \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = n!} \quad \text{となる}$$