

$$I = \int_0^{\pi} (\cos ax)(\cos bx)(\cos cx) dx \quad \text{とおく}$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{ \cos(ax+bx) + \cos(ax-bx) \} \cos cx \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{ \cos(a+b)x (\cos cx) + \cos(a-b)x (\cos cx) \} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \{ \cos(a+b+c)x + \cos(a+b-c)x + \cos(a-b+c)x + \cos(a-b-c)x \} dx \quad \text{となる}$$

$$\text{ここで } m \text{ が定数のとき } \int_0^{\pi} \cos mx \, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{m} \sin mx \right]_0^{\pi} = 0 & (m \neq 0) \\ \int_0^{\pi} 1 \, dx = [x]_0^{\pi} = \pi & (m = 0) \end{cases}$$

となることから

I の値は $a+b+c \neq 0$ か $a+b-c \neq 0$ か $a-b+c \neq 0$ か $a-b-c \neq 0$ のときはゼロとなり

それ以外のときは正となる。

a, b, c はすべてそれぞれ 1 以上 6 以下の整数であることから

(i) $a+b+c \neq 0$ は必ずなりたつ。

(ii) $a+b=c$ となるのは $(a, b, c) = (1, 1, 2),$
 $(1, 2, 3), (2, 1, 3),$
 $(1, 3, 4), (2, 2, 4), (3, 1, 4)$
 $(1, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 2, 5), (4, 1, 5),$
 $(1, 5, 6), (2, 4, 6), (3, 3, 6), (4, 2, 6), (5, 1, 6)$

の 15 通り

(iii) $a+c=b$ となるのは 上と同様に 15 通り

(iv) $b+c=a$ となるのも 上と同様に 15 通り となる

(v) のとき $a < c$ か $b < c$

(vi) のとき $a < b$ か $c < b$

(vii) のとき $b < a$ か $c < a$ であるから (ii)(iii)(iv) は排反であるので 合計 45 通りとなる

以上のことから、求める確率は $\frac{45}{6^3} = \frac{5}{24}$ となる