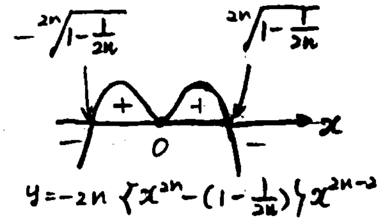
(1) $f(x)=x^{2n-1}e^{-x^{2n}}$ より

$$f'(x)=(2n-1)x^{2n-2}\cdot e^{-x^{2n}}+x^{2n-1}\cdot e^{-x^{2n}}\cdot(-2nx^{2n-1})$$
$$=x^{2n-2}\cdot e^{-x^{2n}}\cdot\{(2n-1)-2nx^{2n}\}$$
$$=\boxed{-2n\left\{x^{2n}-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}\cdot x^{2n-2}\cdot e^{-x^{2n}}}$$



(2) $f'(x)=0$ をとくと $x=\pm\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}$, $x=0$ であるから

$-2\leqq x\leqq 2$ で増減表をかくと以下のようになる

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	0	↗	極大	↘	

$f(0)=0$

$$f\left(\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}\right)=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n-1}{2n}}\times e^{-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n}}}=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{1-\frac{1}{2n}}\times e^{-\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$$

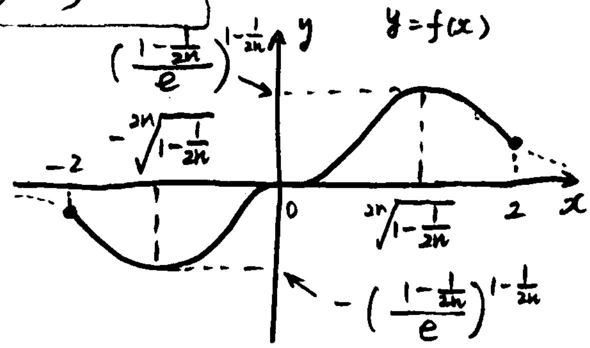
$$f\left(-\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}\right)=\left\{-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}^{\frac{2n-1}{2n}}\times e^{-\left\{-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}^{\frac{2n}{2n}}}=-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{\left(1-\frac{1}{2n}\right)}e^{-\left(1-\frac{1}{2n}\right)}$$

また $f(2)=2^{2n-1}\cdot e^{-2^{2n}}>0=f(0)$

$f(-2)=(-2)^{2n-1}\cdot e^{-(-2)^{2n}}=-2^{2n-1}\cdot e^{-2^{2n}}<0=f(0)$ であるから

> 最大値は $x=\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}$ のとき、$\left(\dfrac{1-\frac{1}{2n}}{e}\right)^{1-\frac{1}{2n}}$
>
> 最小値は $x=-\sqrt[2n]{1-\frac{1}{2n}}$ のとき、$-\left(\dfrac{1-\frac{1}{2n}}{e}\right)^{1-\frac{1}{2n}}$

となる



(3) $I = \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{a_n} f(x)\,dx$ とおくと

$$I = \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{a_n} x^{2n-1} e^{-x^{2n}}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\frac{e^{-x^{2n}}}{-2n} \right]_0^{a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n^2}{2n} \left(e^{-a_n^{2n}} - e^0 \right) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{2} \left(e^{-(n^{-\frac{1}{2n}})^{2n}} - 1 \right) \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ -\frac{n}{2} \left(e^{-n^{-1}} - 1 \right) \right\}$$

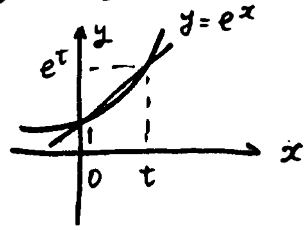
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} \times \frac{1}{2}$$ である

ここで $t = -\frac{1}{n}$ とおくと $n \to \infty$ のとき $t \to -0$ であるから

$$I = \lim_{t\to -0} \frac{e^t - 1}{t} \times \frac{1}{2}$$ となる

ここで $g(x) = e^x$ とおくと

$g'(0) = e^0 = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^0}{t}$ であるので



$$I = g'(0) \times \frac{1}{2} = e^0 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$ となる