

$$(1) I = \int f(x) dx = \int e^{-x} \sin x dx$$

$$= \int (-e^{-x})' \sin x dx$$

$$= -e^{-x} \sin x - \int (-e^{-x}) \cos x dx$$

$$= J - e^{-x} \sin x + C_1 \quad \text{であるから} \quad \boxed{F(x) = -e^{-x} \sin x}$$

$$J = \int g(x) dx = \int e^{-x} \cos x dx$$

$$= \int (-e^{-x})' \cos x dx$$

$$= -e^{-x} \cos x - \int (-e^{-x})(-\sin x) dx$$

$$= -J - e^{-x} \cos x + C_2, \quad \text{であるから} \quad \boxed{G(x) = -e^{-x} \cos x} \quad \text{である}$$

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} (1)より \\ I = J + F(x) + C_1 \quad \text{--- ①} \\ J = -I + G(x) + C_2 \quad \text{--- ②} \end{aligned} \right\} \quad \text{かなりたつので}$$

$$\text{②をたすと} \quad I + J = J - I + F(x) + G(x) + C_1 + C_2 \quad \text{より}$$

$$\boxed{I} = \frac{1}{2} \{ F(x) + G(x) + C_1 + C_2 \}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + \frac{C_1 + C_2}{2}}$$

また①②を②をたすと

$$J - J = J + I + F(x) - G(x) + C_1 - C_2 \quad \text{より}$$

$$\boxed{J} = -\frac{1}{2} \{ F(x) - G(x) + C_1 - C_2 \}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) - \frac{C_1 - C_2}{2}} \quad \text{である}$$

$$(3) \quad f(x) = g(x) \quad \text{とすると} \quad e^{-x} (\sin x - \cos x) = 0 \quad \text{より}$$

$$\sqrt{2} e^{-x} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad \text{よって} \quad x - \frac{\pi}{4} = n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{より}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

k の偶奇によってグラフは左のようになるから

$$S_k = \begin{cases} \int_{(k-1)\pi}^{(k-\frac{3}{4})\pi} \{g(x) - f(x)\} dx + \int_{(k-\frac{3}{4})\pi}^{k\pi} \{f(x) - g(x)\} dx & (k \text{ が奇数}) \\ \int_{(k-1)\pi}^{(k-\frac{3}{4})\pi} \{f(x) - g(x)\} dx + \int_{(k-\frac{3}{4})\pi}^{k\pi} \{g(x) - f(x)\} dx & (k \text{ が偶数}) \end{cases}$$

となる

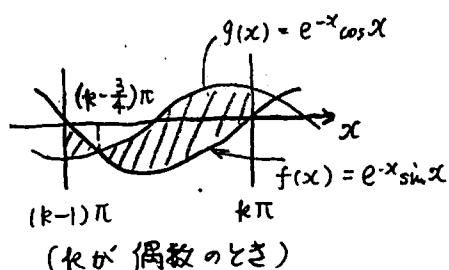
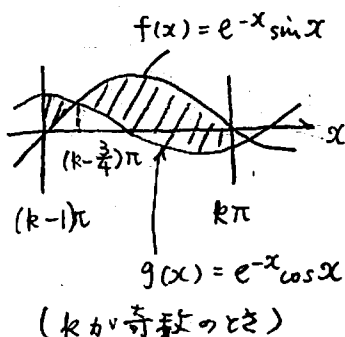
$$\text{ここで } t = x - (k-1)\pi$$

とすると

$$dt = dx,$$

$$\text{また } x = t + (k-1)\pi \quad \text{である}$$

x	$(k-1)\pi$	$\dots$	$(k-\frac{3}{4})\pi$	$\dots$	$k\pi$
t	0	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$	$\dots$	π



$$\begin{aligned}
 \forall t \quad f(x) - g(x) &= e^{-x} (\sin x - \cos x) \\
 &= e^{-t-(k-1)\pi} [\sin \{t+(k-1)\pi\} - \cos \{t+(k-1)\pi\}] \\
 &= e^{-(k-1)\pi} \cdot e^{-t} (-1)^{k-1} (\sin t - \cos t) \\
 &= (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\pi} \{f(t) - g(t)\} \text{ であり} \\
 &= \begin{cases} e^{-(k-1)\pi} \{f(t) - g(t)\} & (k \text{ が奇数}) \\ -e^{-(k-1)\pi} \{f(t) - g(t)\} & (k \text{ が偶数}) \end{cases} \text{ であるから}
 \end{aligned}$$

$$S_k = -e^{-(k-1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(t) - g(t)\} dt + e^{-(k-1)\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \{f(t) - g(t)\} dt \quad \text{と}\quad \text{なる}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{" } I - J &= \int f(x) dx - \int g(x) dx \\
 &= -e^{-x} \sin x + C_1 \quad (C_1 \text{ は定数}) \text{ であるから}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_k &= e^{-(k-1)\pi} [e^{-t} \sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} - e^{-(k-1)\pi} [e^{-t} \sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
 &= e^{-(k-1)\pi} \cdot 2e^{-\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= \boxed{\sqrt{2} e^{-(k-\frac{3}{4})\pi}} \quad \text{と}\quad \text{なる}
 \end{aligned}$$

(4) $\{S_n\}$ は 初項 $S_1 = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$, 公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であり

$|e^{-\pi}| < 1$ より $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は収束し

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} S_k &= \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}}}{1 - e^{-\pi}} \\
 &= \boxed{\frac{\sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi}}{e^{\pi} - 1}} \quad \text{と}\quad \text{なる}
 \end{aligned}$$