

$$(1) f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \quad \text{より} \quad f'(x) = \frac{-\sin x (2 + \sin x) - \cos^2 x}{(2 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-2 \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^2}$$

$$= \left[-\frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} \right]$$

(2) $f'(x) = 0$ の解は $2 \sin x + 1 = 0$ より $\sin x = -\frac{1}{2}$ ことを $0 \leq x \leq 2\pi$ とくから

$$x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

よって $f(x)$ の増減表は以下の通りとなる

x	0	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 極小	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 極大	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに

$$\boxed{\begin{aligned} x = \frac{7}{6}\pi \text{ で 極小値 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{11}{6}\pi \text{ で 極大値 } \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}} \quad \text{をとる}$$

(3) $g(t) = \int_t^{t+\pi} f(x) dx$ より

$$g'(t) = f(t+\pi) - f(t)$$

$$= \frac{\cos(t+\pi)}{2 + \sin(t+\pi)} - \frac{\cos t}{2 + \sin t}$$

$$= \frac{-\cos t}{2 - \sin t} - \frac{\cos t}{2 + \sin t} = \frac{-4 \cos t}{4 - \sin^2 t} \quad \text{であるから}$$

$g(t)$ の増減は以下のようになる

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より $g(t)$ は

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ で単調減少

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ で単調増加となる。

よって $g(t)$ が極小となるときの t の値は

$$\boxed{t = \frac{\pi}{2}}$$

(4) $g(t) = \int_t^{t+\pi} f(x) dx$

$$= \int_t^{t+\pi} \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$$

$$= \left[\log |2 + \sin x| \right]_t^{t+\pi}$$

$$= \log |2 + \sin(t+\pi)| - \log |2 + \sin t|$$

$$= \log \left(\frac{2 - \sin t}{2 + \sin t} \right) \quad \text{であるから} \quad g(t) \text{ の極小値は } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log \left(\frac{2-1}{2+1} \right) = \log \frac{1}{3} = \boxed{-\log 3}$$

である