

$$(1) \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (a \cos x + b) dx = [a \sin x + bx]_0^{\pi} = b\pi$$

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \{f(x)\}^3 dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} (a \cos x + b)^3 dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} (a^3 \cos^3 x + 3a^2 b \cos^2 x + 3ab^2 \cos x + b^3) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \left\{ a^3 \cos x (1 - \sin^2 x) + 3a^2 b \times \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3ab^2 \cos x + b^3 \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[a^3 \sin x - \frac{a^3}{3} \sin^3 x + \frac{3}{2} a^2 b x + \frac{3}{4} a^2 b \sin 2x + 3ab^2 \sin x + b^3 x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} a^2 b \pi + b^3 \pi \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

$$b\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} a^2 b \pi + b^3 \pi \quad \text{であり} \quad \frac{4}{\pi} \text{ を両辺にかけ}$$

$$\boxed{1 + 6a^2 b + 4b^3 - 4b = 0} \quad \text{となる}$$

$$(2) (1) \text{より } b \neq 0 \text{ のとき } 6a^2 = -4b^2 + 4 - \frac{1}{b} \quad \text{であるから}$$

$$f(b) = -4b^2 + 4 - \frac{1}{b} \quad (b > 0) \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} f'(b) &= -8b + \frac{1}{b^2} = \frac{-8}{b^2} \left(b^3 - \frac{1}{8} \right) = -\frac{8}{b^2} \left(b - \frac{1}{2} \right) \left(b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4} \right) \\ &= -\frac{8}{b^2} \left(b - \frac{1}{2} \right) \left(b + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

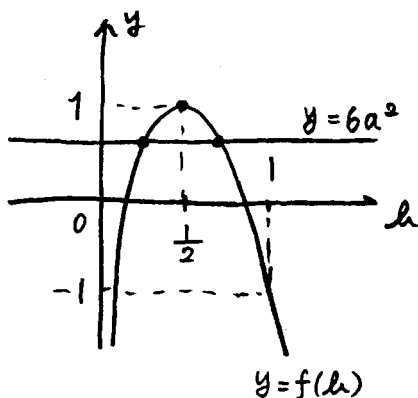
$f(b)$ の $b > 0$ での増減表は以下のようになる

b	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(b)$		+	0	-
$f(b)$		$\nearrow$	1	$\searrow -\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \frac{1}{4} + 4 - 2 = 1 \quad \text{であり}$$

$$\lim_{b \rightarrow +0} f(b) = -\infty, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) = -\infty \quad \text{であるから}$$

$y = f(b)$ のグラフは左のようになる



$y = f(b)$ と $y = 6a^2$ のグラフが

$b > 0$ で共有点をもつとき

$$0 \leq 6a^2 \leq 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq a^2 \leq \frac{1}{6} \quad \text{である。}$$

よって求める a の値の範囲は

$$\boxed{-\frac{\sqrt{6}}{6} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{6}} \quad \text{となる}$$