

$$\int_a^b f(x) dx = c^2 \int_a^b f(x) dx \quad - \textcircled{1} \quad \text{は任意の } a, b, c \text{ でありたつから}$$

$(a, b) = (0, 1)$  を代入すると

$$\int_0^c f(x) dx = c^2 \int_0^1 f(x) dx \quad \text{より} \quad c^2 = \int_0^c f(x) dx \quad \text{である.}$$

この式を両辺  $c$  で微分すると

$$2c = f(c) \quad \text{となるので}$$

$$f(x) = 2x \quad \text{である.}$$

$$\text{よって} \quad f(2) = 2 \times 2 = \boxed{4} \quad \text{?}$$

$$f(-3) = 2 \times (-3) = \boxed{-6} \quad \text{となる}$$

$$I_n = \int_1^{2^n} g(x) dx \quad \text{とし}$$

$$I_2 = \int_1^{2^2} g(x) dx = \int_1^2 g(x) dx + \int_2^{2^2} g(x) dx$$

$$= 1 + \int_2^{2^2} g(x) dx$$

$$\therefore 2^n \quad x=2t \text{ とおくと } \begin{array}{c|c} x & 2 \cdots 2^2 \\ \hline t & 1 \cdots 2 \end{array} \quad dx = 2 \cdot dt \text{ となる}$$

$$I_2 = 1 + \int_1^2 g(2t) \cdot 2 dt$$

$$= 1 + \int_1^2 \frac{1}{4} g(t) \cdot 2 dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \int_1^2 g(t) dt = \boxed{\frac{3}{2}}$$

同様にして  $a_{k+1} = \int_{2^k}^{2^{k+1}} g(x) dx$  とおくと  $x=2t$  とおくと

$$\begin{array}{c|c} x & 2^k \cdots 2^{k+1} \\ \hline t & 2^{k-1} \cdots 2^k \end{array}$$

$$a_{k+1} = \int_{2^{k-1}}^{2^k} g(2t) \cdot 2 dt$$

$$= \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{4} g(t) \cdot 2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{2^{k-1}}^{2^k} g(t) dt = \frac{1}{2} a_k$$

よって  $\{a_n\}$  は初項  $a_1 = \int_{2^0}^{2^1} g(x) dx = 1$ .

公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列となるから  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  である

$$\text{よって } I_4 = \int_1^{2^4} g(x) dx = \int_1^2 g(x) dx + \int_2^{2^2} g(x) dx + \int_{2^2}^{2^3} g(x) dx + \int_{2^3}^{2^4} g(x) dx$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8+4+2+1}{8} = \boxed{\frac{15}{8}} \quad \text{となす}$$

また  $I_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$= \frac{1 \times \{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{2} \quad \text{となす}$$