(1) $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x}\, dx$

$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}\left\{(1+a)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}$ であるから

$$\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{2}{3} \times \frac{(1+a)^{\frac{3}{2}} - 1}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{a}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\{(0+1) - 0\} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(2) $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x}\, dx$

$$= \int_0^a x^n \left\{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right\}' dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^n (1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a - \frac{2}{3}\int_0^a n x^{n-1}(1+x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3}\int_0^a x^{n-1}\left\{(1+x)^{\frac{1}{2}} \times (1+x)\right\} dx$$

$$= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3}\left\{\int_0^a x^{n-1}(1+x)^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^a x^n (1+x)^{\frac{1}{2}} dx\right\}$$

$$= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3}\left\{I_{n-1}(a) + I_n(a)\right\}$$ である。

よって $\left(1 + \frac{2n}{3}\right) I_n(a) = \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3} I_{n-1}(a)$ より

$$I_n(a) = \frac{3}{3+2n}\left\{\frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3} I_{n-1}(a)\right\}$$ となる

ゆえに $\boxed{I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)}$ がなりたつ。 ―①

(3) ①の両辺に $a^{-(\frac{3}{2}+n)}$ をかけると

$$a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) = \frac{2}{3+2n} \times \frac{a^n}{a^{\frac{3}{2}} \cdot a^n}(1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} \times a^{-(\frac{3}{2}+n-1)} \cdot a^{-1} I_{n-1}(a)$$ より

$$\boxed{a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) = \frac{2}{3+2n} \times \left(\frac{1}{a}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} \times \frac{1}{a} \times a^{-(\frac{3}{2}+n-1)} I_{n-1}(a)}$$ ―② となる

ここで $n=1$ のとき

$$a^{-(\frac{3}{2}+1)} I_1(a) = \frac{2}{3+2\times 1}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\times 1}{3+2\times 1} \times \frac{1}{a} \times a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$$ より

(1) から

$$\lim_{a\to\infty} a^{-(\frac{3}{2}+1)} I_1(a) = \frac{2}{5}(0+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \times 0 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$ となって

極限値 $\frac{2}{5}$ をもつ。

$n=k$ (kが自然数)のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a^{-\left(\frac{3}{2}+k-1\right)} I_{k-1}(a)\right\} = \alpha_{k-1}$$

(α_{k-1}は実数)とおき

極限値 α_{k-1} をもつとすると

②より

$$a^{-\left(\frac{3}{2}+k\right)} I_k(a) = \frac{2}{3+2k}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2k}{3+2k} \times \frac{1}{a} \times a^{-\left(\frac{3}{2}+k-1\right)} I_{k-1}(a)$$

だから

$$\lim_{a\to\infty}\left\{a^{-\left(\frac{3}{2}+k\right)} I_k(a)\right\} = \frac{2}{3+2k} \times 1^{\frac{3}{2}} - \frac{2k}{3+2k} \times 0 \times \alpha_{k-1} = \frac{2}{3+2k}$$

より

極限値 $\frac{2}{3+2k}$ をもつ。

以上のことから、すべての自然数nで $\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ の値は存在し、

その値は $\boxed{\frac{2}{3+2n}}$ となる