

$a > 0$ に対し $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} \, dx$, $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} \, dx$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。

(3) 自然数 n に対して、 $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。

[’07 東北大]