(1) $f(x) = 2\log(1+e^x) - x - \log 2$ より

$$f'(x) = 2\times\frac{e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{2e^x-(1+e^x)}{1+e^x} = \frac{e^x-1}{1+e^x}$$ だから

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)\times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$ となる。

よって $$\log f''(x) = \log\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \log 2e^x - \log(1+e^x)^2$$

$$= \log 2 + \log e^x - 2\log(1+e^x)$$

$$= -\{2\log(1+e^x) - x - \log 2\} = -f(x)$$ となるので

$\underline{\log f''(x) = -f(x) \text{ はなりたつ。}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx = I$ とおく

(1)より $e^{-f(x)} = f''(x)$ であるから

$$I = \int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)\,dx$$

$$= \Big[(x-\log 2)f'(x)\Big]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2}1\times f'(x)\,dx$$

$$= \Big[(x-\log 2)\times\frac{e^x-1}{e^x+1} - 2\log(1+e^x) + x\Big]_0^{\log 2}$$

$$= (\log 2)\times\frac{1-1}{1+1} - 2\log(1+e^{\log 2}) + \log 2 + 2\log(1+1)$$

$$= 0 - 2\log 3 + \log 2 + 2\log 2$$

$$= \log\frac{2^3}{3^2} = \boxed{\log\frac{8}{9}}$$