

自然数 n に対して、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく。次の問に答えよ。

(1) 定積分 I_1, I_2, I_3 を求めよ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$I_n \geq I_{n+1}$$

(3) 次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(4) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

[10 大阪教育大]