(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ のとき

$$\int_0^{\log 7} f(x)\,dx = \int_0^{\log 7} \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx$$

$$= \Big[\log(1+e^x)\Big]_0^{\log 7}$$

$$= \log(1+e^{\log 7}) - \log(1+e^0)$$

$$= \log(1+7) - \log(1+1) = \log\frac{8}{2} = \boxed{2\log 2}$$

(2) $f'(x) = af(x) + b\{f(x)\}^2$ とすると

$$\frac{e^x(1+e^x)-(e^x)^2}{(1+e^x)^2} = a \times \frac{e^x}{1+e^x} + b \times \frac{(e^x)^2}{(1+e^x)^2}$$ より

$$e^x = a(1+e^x)e^x + b e^{2x}.$$

$$e^x = (a+b)e^{2x} + ae^x$$

よって $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ がなりたつから $\boxed{(a,b)=(1,-1)}$ となる

(3) (2)の結果より $\{f(x)\}^2 = f(x) - f'(x)$ であるから

$$\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2 dx = \int_0^{\log 7} f(x)\,dx - \int_0^{\log 7} f'(x)\,dx$$

$$= 2\log 2 - \Big[f(x)\Big]_0^{\log 7}$$

$$= 2\log 2 - \frac{e^{\log 7}}{1+e^{\log 7}} + \frac{e^0}{1+e^0}$$

$$= 2\log 2 - \frac{7}{1+7} + \frac{1}{2}$$

$$= 2\log 2 - \frac{7}{8} + \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{2\log 2 - \frac{3}{8}}$$

(4) $\{f(x)\}^2 = f(x) - f'(x)$ であるから

$\{f(x)\}^3 = \{f(x)\}^2 - f(x)f'(x)$ より

$$\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^3 dx = \int_0^{\log 7} \{f(x)\}^2 dx - \int_0^{\log 7} f(x)f'(x)\,dx$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_0^{\log 7}$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{e^{\log 7}}{1+e^{\log 7}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e^0}{1+e^0}\right)^2$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{1+7}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{49}{64} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2\log 2 - \frac{48}{128} - \frac{49}{128} + \frac{16}{128}$$

$$= \boxed{2\log 2 - \frac{81}{128}}$$