

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx = I \text{ とおく}$$

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx.$$

ここで、前者において $x = -t$ とおくと $dx = -dt$, $\frac{x}{t} \Big|_{-1}^0 = \frac{0}{0}$ となる

$$I = \int_1^0 \frac{(-t)^2}{1+e^{-t}} \cdot (-dt) + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2}{1+e^{-t}} dt + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2 e^t}{e^t + 1} dt + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 (1+e^x)}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \boxed{\frac{1}{3}}$$