

定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\cos x)^n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) について次の問いに答えよ。

(1) I_0, I_{-1}, I_2 を求めよ。

(2) I_1 を求めよ。

(3) 部分積分法を用いて、 $nI_n - (n+1)I_{n+2} + (\sqrt{2})^n = 0$ が整数 n に対して成り立つことを示せ。

(4) I_{-3}, I_{-2}, I_3 を求めよ。

(5) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$ および $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ を求めよ。 [09同志社大]