

(1) $f(x) = x - |\sin x|$ とおく

$$f(x) = \begin{cases} x - \sin x & (0 < x \leq \pi) \\ x + \sin x & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases} \quad \text{である.}$$

i) $0 < x \leq \pi$ のとき

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \text{より} \quad f(x) \text{ は単調増加}$$

$$\text{また } f(0) = 0 \text{ であるから}$$

$$0 < x \leq \pi \text{ では } f(x) > 0.$$

ii) $\pi \leq x \leq 2\pi$ のとき

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \text{より} \quad f(x) \text{ は単調増加}$$

$$\text{また } f(\pi) = \pi + \sin \pi = \pi > 0 \text{ であるから}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi \text{ では } f(x) > 0.$$

ゆえに $0 < x \leq 2\pi$ のとき $|\sin x| < x$ はなりたつ。

$$\begin{aligned} (2) \quad f_2(x) &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f_1(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \sin t dt \\ &= \frac{1}{2a} [-\cos t]_{x-a}^{x+a} \\ &= \frac{1}{2a} \{ -\cos(x+a) + \cos(x-a) \} \\ &= \frac{1}{2a} (-\cancel{\cos x \cos a} + \sin x \sin a + \cancel{\cos x \cos a} + \sin x \sin a) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot 2 \sin x \sin a \\ &= \boxed{\frac{\sin a}{a} \sin x} \end{aligned}$$

(3) $f_k(x) = a_k \sin x$ (a_k は定数) とおくと

$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(x) &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f_k(t) dt \\
 &= \frac{a_k}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \sin t dt \quad \left(\begin{array}{l} (2) \text{より} \\ \swarrow \end{array} \right) \\
 &= \frac{a_k}{2a} \cdot 2 \sin x \sin a \\
 &= \frac{\sin a}{a} \cdot a_k \sin x \\
 &= \left(\frac{\sin a}{a} \right) \cdot f_k(x) \quad \text{であるから}
 \end{aligned}$$

$\{f_n(x)\}$ は 初項 $f_1(x) = \sin x$.

公比 $\frac{\sin a}{a}$ の 等比数列 より.

$$f_n(x) = \left(\frac{\sin a}{a} \right)^{n-1} \cdot \sin x$$

(4) (1) より $0 < a \leq 2\pi$ のとき $|\sin a| < a$ が成り立つから

$$0 < |\sin a| < |a| \text{ より}$$

$$0 < \left| \frac{\sin a}{a} \right| < 1 \text{ であるので}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin a}{a}} = \frac{a \sin x}{a - \sin a} \quad \text{と表す}$$