

$$f(x) = \sqrt{x} \log x \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log x + \sqrt{x} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log x + \frac{2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\log x + 2) \end{aligned}$$

$$\text{よって } f'(x) = 0 \text{ をとくと } \log x = -2 \text{ より } x = e^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{また } f''(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - (\log x + 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} \\ &= \frac{2 - (\log x + 2)}{2x \cdot 2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-\log x}{4x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } f''(x) = 0 \text{ をとくと } \log x = 0 \text{ より } x = e^0 = 1.$$

ゆえに増減表は以下のようになる。(定義域は実数条件より $x > 0$)

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	0	-
$f(x)$		↘	$-\frac{2}{e}$ 最小	↗	0 変曲点	↗

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{e^2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{e^2}} \log e^{-2} \\ &= \frac{1}{e} \times (-2) = -\frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$f(1) = 1 \times \log 1 = 0$$

ゆえに $f(x)$ の最小値は $-\frac{2}{e}$ ($x = \frac{1}{e^2}$ のとき)
変曲点の x 座標は $x = 1$ となる

$$\begin{aligned} \text{よって } \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e \sqrt{x} \log x dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} e\sqrt{e} - \frac{2}{3} \int_1^e x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} e\sqrt{e} - \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^e \\ &= \frac{2}{3} e\sqrt{e} - \frac{4}{9} e\sqrt{e} + \frac{4}{9} = \frac{2}{9} e\sqrt{e} + \frac{4}{9} = \frac{2}{9} (e\sqrt{e} + 2) \end{aligned}$$