(1) $I_1 = \int_2^3 \frac{(x-3)}{x}dx = \int_2^3 \left(1-\frac{3}{x}\right)dx$

$= \left[x - 3\log|x|\right]_2^3$

$= (3-2) - 3(\log 3 - \log 2)$

$= \boxed{1 - 3\log\frac{3}{2}}$

(2) $\frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$ より

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき $1-\frac{3}{3} \geqq 1-\frac{3}{x} \geqq 1-\frac{3}{2}$ であるから

$0 \geqq 1-\frac{3}{x} \geqq -\frac{1}{2}$

よって $\boxed{0 \leqq \left|\frac{x-3}{x}\right| \leqq \frac{1}{2}}$ となる。 ①

$I_n = \int_2^3 \frac{(x-3)^n}{nx^n}dx = \frac{1}{n}\int_2^3 \left(\frac{x-3}{x}\right)^n dx$ であり ①より

$0 \leqq \frac{1}{n}\int_2^3 \left|\frac{x-3}{x}\right|^n dx \leqq \frac{1}{n}\int_2^3 \left(\frac{1}{2}\right)dx$ がなりたつ。

ここで $\frac{1}{n}\int_2^3 \left(\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{n}\times\frac{1}{2}\left[x\right]_2^3 = \frac{1}{2n}$ より

$0 \leqq \frac{1}{n}\int_2^3 \left|\frac{x-3}{x}\right|^n dx \leqq \frac{1}{2n}$ がなりたつ。

ここで $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{2n} \to 0$ より $\frac{1}{n}\int_2^3 \left|\frac{x-3}{x}\right|^n dx \to 0$ であるから

$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ となる

(3) $\boxed{I_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\int_2^3 \frac{(x-3)^{n+1}}{x^{n+1}}\,dx$

$= \frac{1}{n+1}\int_2^3 \left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)'(x-3)^{n+1}\,dx$

$= \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{nx^n}(x-3)^{n+1}\right]_2^3 + \frac{1}{n(n+1)}\int_2^3 \frac{1}{x^n}\cdot(n+1)\cdot(x-3)^n\,dx$

$= \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \int_2^3 \frac{(x-3)^n}{nx^n}\,dx$

$= \boxed{-\frac{1}{n(n+1)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n + I_n}$

(4) (3) より $\frac{1}{n(n+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = I_n - I_{n+1}$ がなりたつので

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k+1})$

$= (I_1 - \cancel{I_2})$
$+ (\cancel{I_2} - \cancel{I_3})$
$+ (\cancel{I_3} - \cancel{I_4})$
$+ \cdots$
$+ (\cancel{I_n} - I_{n+1})$

$= I_1 - I_{n+1}$ であるから. $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ より $\lim_{n\to\infty} I_{n+1} = 0$ だから

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(I_1 - I_{n+1})$

$= I_1 = \boxed{1 - 3\log\frac{3}{2}}$