(1) $f(x)=4e^{-2}-x^2e^{-x}$ とおくと、$f'(x)=-2xe^{-x}-x^2\cdot(-e^{-x})=x(x-2)e^{-x}$ であるから、

$x \geqq 2$ のとき、$f'(x) \geqq 0$ より、$x \geqq 2$ で $f(x)$ は単調増加である。

ここで、$f(2)=4e^{-2}-4e^{-2}=0$ より、$x \geqq 2$ で $f(x) \geqq 0$ となって、

$x \geqq 2$ のとき、$x^2e^{-x} \leqq 4e^{-2}$ ……① は成り立つ。

よって、$x \geqq 2$ のとき、$0 < x^2e^{-x} \leqq 4e^{-2}$ が成り立つので、両辺 $x\ (>0)$ でわって、

$0 < xe^{-x} \leqq \dfrac{4}{xe^2}$ が成り立つ。ここで、$x \to \infty$ のとき、$\dfrac{4}{xe^2} \to 0$ であるから、

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ となる。

(2) (1) より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ne^{-n}=0$ であるから、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^n x(-e^{-x})'dx &= \lim_{n\to\infty}\left\{\Big[-xe^{-x}\Big]_0^n+\int_0^n e^{-x}dx\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\Big[-xe^{-x}-e^{-x}\Big]_0^n\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-ne^{-n}-e^{-n}+0+e^{-0}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-ne^{-n}-e^{-n}+1\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$