

$$(1) \quad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{のとき}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ とき} \quad a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x) (-\cos x)' \, dx \\ &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx \\ &= (n-1) (a_{n-2} - a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad a_n + (n-1)a_n &= (n-1)a_{n-2} \quad \text{より} \quad \text{--- ①} \\ \boxed{n a_n = (n-1) a_{n-2}} &\quad \text{がなりたつ} \end{aligned}$$

(2) ①式の両辺に a_{n-1} をかけると

$$\begin{aligned} n a_n a_{n-1} &= (n-1) a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{だから} \\ b_n = n a_n a_{n-1} \quad \text{とおくと} \quad b_n &= b_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \text{がなりたつ} \\ \text{よって} \{b_n\} &\text{は一定の数列となり} \quad b_n = b_1 = 1 \times a_1 a_0 \quad \text{がなりたつ} \\ \text{よって} \quad a_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ a_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n = a_1 a_0 &= 1 \times \frac{\pi}{2} \quad \text{であるから} \quad \text{--- ②} \\ \boxed{n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}} &\quad \text{がなりたつ} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$(3) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ とき} \quad 0 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{より} \quad \sin^n x \geq \sin^{n+1} x \quad \text{であるから}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx \quad \text{がなりたつ}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad a_n &> a_{n+1} \quad \text{がなりたつから} \quad \text{--- ③} \\ \boxed{a_n \geq a_{n+1}} &\quad \text{もなりたつ} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \text{②③より} \quad n a_n a_{n+1} \leq n a_n^2 \leq n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{がなりたつので}$$

$$\frac{n}{n+1} \times (n+1) a_{n+1} a_n \leq n a_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \times \frac{\pi}{2} \leq n a_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{である}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{より、はさみうちの原理から}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 = \frac{\pi}{2}} \quad \text{がなりたつ}$$