

数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) と定める.

(1)  $n \geq 2$  のとき,  $na_n = (n-1)a_{n-2}$  であることを示せ.

(2)  $n \geq 1$  のとき,  $na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$  であることを示せ.

(3)  $a_n \geq a_{n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) であることを示せ.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2$  を求めよ.

[ '08 山口大 ]