(1) $f(x)=\dfrac{4-|x|x}{2+x}=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{2+x} & (x\geqq 0)\\[2mm] \dfrac{4+x^2}{2+x} & (x<0,\ x\neq -2)\end{cases}$ より

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\dfrac{4-(0+h)^2}{2+(0+h)}-\dfrac{4-0^2}{2+0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\dfrac{(2+h)(2-h)}{2+h}-2}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2-h-2}{h}=\lim_{h\to+0}(-1)=\boxed{-1}$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{4+(0+h)^2}{2+(0+h)}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{4+h^2}{2+h}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{1}{h}\times\frac{4+h^2-2(2+h)}{2+h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{1}{h}\times\frac{h^2-2h}{2+h}=\lim_{h\to-0}\frac{h-2}{h+2}=\frac{-2}{2}=\boxed{-1}$$

よって　$f'(0)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\boxed{-1}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{2+x}=\dfrac{(2+x)(2-x)}{2+x}=-x+2 & (x\geqq 0)\\[2mm] \dfrac{4+x^2}{2+x} & (x<0,\ x\neq -2)\end{cases}$ より

i) $x>0$のとき

$f'(x)=-1$　よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\boxed{-1}$

ii) $x<0$のとき

$$f'(x)=\frac{2x(2+x)-(4+x^2)\cdot 1}{(2+x)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x-4}{x^2+4x+4}.$$　よって $\displaystyle\lim_{x\to-0}f'(x)=\lim_{x\to-0}\frac{x^2+4x-4}{x^2+4x+4}=\frac{-4}{4}=\boxed{-1}$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=-1$ となり (1)より $f'(0)=-1$ で一致するので

$f'(x)$は $x=0$ で連続である.

(3) $$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{4+x^2}{2+x}dx+\int_{0}^{1}(-x+2)dx$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & \underline{-2} \\ & -2 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & 8 & \end{array}$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{(x+2)(x-2)+8}{x+2}dx+\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx+\left(-\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-2x+8\log|x+2|\right]_{-1}^{0}+\frac{3}{2}$$

$$=8\log 2-\frac{1}{2}+2\times(-1)-8\log 1+\frac{3}{2}$$

$$=8\log 2-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\boxed{-1+8\log 2}$$