

(1) $m \geq 1$ において $f_m(x) = e^x - \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \right\}$ — $\textcircled{*}$ がなりたつことを示す.

i) $m=1$ のとき $f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt$
 $= \int_0^x e^t dt$
 $= [e^t]_0^x = e^x - 1$ よって $\textcircled{*}$ はなりたつ.

ii) $m=k$ (k は自然数) のとき $\textcircled{*}$ がなりたつと仮定すると

$m=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \int_0^x f_k(t) dt \\ &= \int_0^x \left\{ e^t - \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right\} dt \\ &= \left[e^t - \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} \right) \right]_0^x \\ &= e^x - \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} \right) - e^0 \\ &= e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

よって $\textcircled{*}$ はなりたつ.

i) ii) より, すべての自然数 m で $\textcircled{*}$ はなりたつので

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x) \quad \text{はなりたつ}$$

(2) (1) の $\textcircled{*}$ より $f'_n(x) = e^x - \left\{ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \right\}$
 $= f_{n-1}(x)$ となるので

$f'_1(x) = f_0(x) = e^x > 0$ と $f_1(0) = e^0 - 1 = 0$ より

$x \geq 0$ で $f_1(x) \geq 0$ がなりたつ.

また $x \geq 0$ で $f_k(x) \geq 0$ (k は自然数) と仮定すると

$f'_{k+1}(x) = f_k(x) \geq 0$ と $f_{k+1}(0) = e^0 - 1 = 0$ より

$x \geq 0$ で $f_{k+1}(x) \geq 0$ がなりたつので

すべての自然数 m で $f_m(x) \geq 0$ がなりたつ — $\textcircled{1}$

$$*1: g_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{f_n(x)}{e^x} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f_n(x)}{e^x} - \frac{f_n'(x)}{e^x} \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{e^x} \left\{ e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{e^x} \left\{ e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right\} \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{e^x} \times \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^{n-1}}{e^x \cdot n!} \times (e^x \cdot n + x) \geq 0 \quad (x \geq 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

7°

$$g_n(0) = 0 \quad \text{より} \quad x \geq 0 \text{ なら } g_n(x) \geq 0 \text{ になり} \quad \text{---}$$

$$\text{よって } x \geq 0 \text{ なら } \frac{x^n}{n!} \geq \frac{f_n(x)}{e^x} \quad \text{が成り立つから}$$

$$x \geq 0 \text{ なら } f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!} \times e^x \quad \text{が成り立つ。} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{① ② より } x \geq 0 \text{ なら } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!} e^x \quad \text{--- (3) が成り立つ。}$$

$$(3) \quad (2) \text{ より } 0 \leq f_n(1) \leq \frac{1^n}{n!} \cdot e^1 = \frac{e}{n!} \quad \text{が成り立つから}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{e}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$$