

$n=0,1,2,\dots$ に対して、関数 $f_n(x)$ を $f_0(x)=e^x$, $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t) dt$ によって定める。以下の問に答えよ。

(1) $n \geq 1$ に対して $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)$ を示せ。

(2) $n \geq 1$ とする。 $x \geq 0$ に対して、不等式 $0 \leq f_n(x) - \frac{x^n}{n!} e^x$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$ を求めよ。

[06早稲田大]