

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{ax^2 + (1-2a)x - 2 - (a+1-2a-2)}{x-1} \\
 &= \frac{ax^2 + (1-2a)x + (a-1)}{x-1} \\
 &= \frac{(x-1)(ax - a + 1)}{x-1} \\
 &= ax - a + 1 \quad \tau \text{ あり.}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2ax + 1 - 2a \quad \text{よ} \rangle \quad f'(c) = 2ac + 1 - 2a \quad \tau \text{ あり}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) \quad \text{と} \quad c < x$$

$$2ac + 1 - 2a = ax - a + 1$$

$$2ac = ax + a$$

$$\boxed{c = \frac{1}{2}(x+1)} \quad \leftarrow \left(c \text{ は } x \text{ と } 1 \text{ の 中間点 } \tau \text{ ある } \text{と} \text{ が } \text{わかる} \right)$$

$$(2) \quad g(x) = \frac{1}{2}(x+1) \quad \tau \text{ あり.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2} \times (1+1) = 1 \quad \text{よ} \rangle$$

$$g(1) = 1 \text{ のとき } \quad g(x) \text{ は } x=1 \text{ で 連続である}$$

$$(3) \quad h(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)$$

$$= a \times \frac{1}{4}(x+1)^2 + (1-2a) \times \frac{1}{2}(x+1) - 2$$

$$= \frac{1}{4} (ax^2 + 2ax + a + 2(1-2a)(x+1) - 8)$$

$$= \frac{1}{4} \{ ax^2 + 2(1-a)x - 3(a+2) \}$$

$$= \frac{1}{4} (ax + a + 2)(x - 3)$$

$$= \frac{a}{4} \left\{ x + \left(1 + \frac{2}{a}\right) \right\} (x - 3)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a & a+2 \\ 1 & -3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a+2 \\ -3a \\ -2a+2 \end{array} \right)$$

$$\text{よ} \rangle \quad \boxed{S(a)} = \int_a^{\beta} |h(x)| dx$$

$$= \left| \frac{a}{4} \times \frac{\left\{ 3 + \left(1 + \frac{2}{a}\right) \right\}^3}{6} \right|$$

$$= \left| \frac{a}{24} \left(\frac{2}{a} + 4 \right)^3 \right|$$

$$= \left| \frac{a}{24} \times \frac{(2+4a)^3}{a^3} \right| = \left| \frac{1}{24} \times \frac{2^3(1+2a)^3}{a^2} \right| = \left| \frac{1}{3} \times \frac{(2a+1)^3}{a^2} \right| = \boxed{\frac{(2a+1)^3}{3a^2}}$$

$$(\because a > 0)$$

$$S(a) = \frac{(2a+1)^3}{3a^2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{3(2a+1)^2 \cdot 2 \cdot a^2 - (2a+1)^3 \cdot 2a}{3 \times a^4} \\ &= \frac{2a(2a+1)^2 \{3a - (2a+1)\}}{3a^4} \\ &= \frac{2(2a+1)^2(a-1)}{3a^3} \end{aligned}$$

よって 増減表は下のようになるので

a	0	...	1	...
S'(a)		-	0	+
S(a)		↘	最小	↗

S(1) が最小値をとる。その値は、

$$S(1) = \frac{(2 \times 1 + 1)^3}{3 \times 1^2} = \frac{3^3}{3} = 9.$$

ゆえに S(a) の値が最も小さくなるような

a の値は $\boxed{a=1}$