$$\int_{10}^{100} \log_{10} x \, dx$$

$$= \int_{10}^{100} (x)' \times \frac{\log_e x}{\log_e 10} \, dx$$

$$= \frac{1}{\log_e 10} \left[ x \log_e x \right]_{10}^{100} - \frac{1}{\log_e 10} \int_{10}^{100} x \times \frac{1}{x} \, dx$$

$$= 100 \times \frac{\log_e 100}{\log_e 10} - 10 \times \frac{\log_e 10}{\log_e 10} - \frac{1}{\log_e 10} \left[ x \right]_{10}^{100}$$

$$= 100 \times \log_{10} 100 - 10 - \frac{1}{\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} e}} \times (100 - 10)$$

$$= 200 - 10 - 90 \log_{10} e$$

$$= 190 - 90 \log_{10} e \quad \text{である}$$

ここで $0.434 < \log_{10} e < 0.435$ がなりたち 以下のように変形して

$$90 \times 0.434 < 90 \times \log_{10} e < 90 \times 0.435$$

$$-39.06 > -90 \log_{10} e > -39.15$$

$$190 - 39.06 > 190 - 90 \log_{10} e > 190 - 39.15$$

$$150.94 > 190 - 90 \log_{10} e > 150.85 \quad \text{より}$$

$$150.85 < \int_{10}^{100} \log_{10} x \, dx < 150.94 \quad \text{がなりたつ.}$$

ゆえに

$n < \int_{10}^{100} \log_{10} x \, dx$ をみたす 最大の自然数 $n$ は

$n = 150$ である