

(1) 閉区間 $[0, 1]$ で $t^n e^{-t} \geq 0$ であるから 明らかに $0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ になりたつ。

また $[0, 1]$ で $t^n e^{-t} \leq 1^n e^{-t}$ であるから

$$\int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 1^n e^{-t} dt \quad \text{がなりたつ}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 1^n e^{-t} dt &= \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 \\ &= -e^{-1} + e^0 \\ &= 1 - e^{-1} \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq 1 - e^{-1} \quad \text{がなりたつ。}$$

$$\text{ゆえに} \quad \left[0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq 1 - e^{-1} \right] \quad \text{がなりたつ}$$

(2) (1)より $0 \leq n! a_n \leq 1 - e^{-1}$ がなりたつから

$$0 \leq a_n \leq \frac{1 - e^{-1}}{n!} \quad \text{がなりたつ。}$$

$$\text{よって } n \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{1 - e^{-1}}{n!} \rightarrow 0 \text{ だから } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0} \text{ がなりたつ}$$

$$(3) \quad n! a_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)' e^{-t} dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{n+1} \times e^{-1} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)e} + \frac{1}{n+1} \times (n+1)! \cdot a_{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)e} + n! a_{n+1} \quad \text{である}$$

よって 両辺 $n!$ で割って

$$a_n = \frac{1}{(n+1)! e} + a_{n+1} \quad \text{より}$$

$$\boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{1}{(n+1)! e}} \quad \text{がなりたつ。}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad a_1 &= \frac{1}{1!} \int_0^1 t^1 e^{-t} dt \\
 &= \int_0^1 t (-e^{-t})' dt \\
 &= [-te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt \\
 &= -1 \times e^{-1} + [-e^{-t}]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{e} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} \quad \text{であり}
 \end{aligned}$$

(3)より $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{(k+1)!e} \right) \quad \text{であるから}$$

$$a_n = 1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{--- ①}$$

これは $n=1$ でもなりたつ。

① を変形すると

$$e a_n = e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{より}$$

$$e - 1 = e \cdot a_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

ここで $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e \cdot a_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) \quad \text{より}$$

$$e - 1 = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\text{ゆえに } \boxed{e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}} \quad \text{がなりたつ}$$