

数列 $\{a_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ を $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ で定める。ここで e は自然対数の底とする。

(1) $0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq 1 - e^{-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。

(3) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{(n+1)!e} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(4) $e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を示せ。

[04高知大]