

$$(1) \int_0^{m\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_0^{\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx.$$

$$\text{よって } \int_0^{m\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx$$

はなりたつ。

$$(2) \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx \quad \text{において } t = nx \text{ とおく}$$

$$dt = n \cdot dx, \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \cdots & 1 \\ \hline t & 0 & \cdots & n \end{array} \text{ より}$$

$$\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \quad \text{--- ① はなりたつ.}$$

$$\text{ここで } \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} \geq 0, \quad m\pi \leq n < (m+1)\pi \text{ より}$$

$$\frac{1}{n} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt < \frac{1}{n} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \quad \text{--- ②}$$

はなりたつ。ここで (1) より ② は

$$\frac{1}{n} \times m \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt < \frac{1}{n} \times (m+1) \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \quad \text{--- ②'}$$

とる。

$$\text{また, } 0 < \frac{1}{(m+1)\pi} < \frac{1}{n}, \quad 0 < t < \pi \text{ なら } \sin t > 0 \text{ より}$$

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt < \frac{m}{n} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \quad \text{--- ③}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m\pi}, \quad 0 < t < \pi \text{ なら } \sin t > 0 \text{ より}$$

$$\frac{m+1}{n} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} dt = \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \quad \text{--- ④}$$

はなりたつ。

③④①を②'に代入することにより

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx < \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx < \frac{m+1}{m\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx$$

はなりたつ。

ゆえに

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx$$

もなりたつ。 $\square$ ⑤

(3) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx$ において $\cos x = \tan \theta$ とおくと

$$-\sin x = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (*)$$

$$\sin x dx = -\frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \cdots & \pi \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \cdots & -\frac{\pi}{4} \end{array} \quad \text{ただし}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)^2} \times \left(-\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right)^2} \times \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

よって $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ より $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ となるから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{m\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{m}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

とわかる。

(2)の⑤において はさみうちの定理より

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right)$$