(1) $I(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_k$ より

$$I(0)=\sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_0C_k=\frac{(-1)^0}{2\times0+1}{}_0C_0=\frac{1}{1}\times1=\boxed{1}$$

$$I(1)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_1C_k=\frac{1}{1}\times{}_1C_0+\frac{-1}{3}\times{}_1C_1=1\times1-\frac{1}{3}\times1=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$I(2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_2C_k=\frac{1}{1}\times{}_2C_0+\frac{-1}{3}\times{}_2C_1+\frac{1}{5}\times{}_2C_2$$

$$=1\times1-\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{5}\times1=\frac{15-2\times5+3}{15}=\boxed{\frac{8}{15}}$$

$$I(3)=\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_3C_k=\frac{1}{1}\times{}_3C_0+\frac{-1}{3}\times{}_3C_1+\frac{1}{5}\times{}_3C_2+\frac{-1}{7}{}_3C_3$$

$$=1\times1-\frac{1}{3}\times3+\frac{1}{5}\times3-\frac{1}{7}\times1=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{21-5}{35}=\boxed{\frac{16}{35}}$$

(2) $$(1-y^2)^n={}_nC_0\times1^n\times(-y^2)^0+{}_nC_1\times1^{n-1}\times(-y^2)^1+{}_nC_2\times1^{n-2}\times(-y^2)^2+\cdots$$

$$\cdots+{}_nC_n\times1^0\times(-y^2)^n$$

$$={}_nC_0\times(-y^2)^0+{}_nC_1\times(-y^2)^1+{}_nC_2\times(-y^2)^2+\cdots+{}_nC_n\times(-y^2)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(-1)^k\cdot y^{2k}$$ だから

$$\int_0^1(1-y^2)^n dy=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(-1)^k\cdot\int_0^1 y^{2k}\cdot dy$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\times(-1)^k\times\left[\frac{y^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_k=I(n)$$ がなりたつ.

(3) $y=\sin x$ とおくと $dy=\cos x\cdot dx$ , $\begin{array}{c|ccc} y & 0 & \cdots & 1 \\ \hline x & 0 & \cdots & \frac{\pi}{2} \end{array}$ だから

$$\int_0^1 (1-y^2)^n dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^n \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x)^n \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)^n dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx$ はなりたつ。

(4) $\dfrac{d}{dx}\left\{(\cos x)^{2n}\cdot \sin x\right\}$

$$= 2n(\cos x)^{2n-1}\cdot(-\sin x)\cdot \sin x + (\cos x)^{2n}\cdot \cos x$$

$$= -2n(\cos x)^{2n-1}\cdot(1-\cos^2 x) + (\cos x)^{2n+1}$$

$$= -2n(\cos x)^{2n-1} + 2n(\cos x)^{2n+1} + (\cos x)^{2n+1}$$

$$= (2n+1)(\cos x)^{2n+1} - 2n(\cos x)^{2n-1}$$

よって なりたつ。

(5) (3)より $I(n) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx$ とできるから (4)の式を0から$\frac{\pi}{2}$まで, $x$で積分すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx}\left\{(\cos x)^{2n}\cdot \sin x\right\}\cdot dx = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1} dx$$ より

$$\Big[(\cos x)^{2n}\cdot \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (2n+1)\cdot I(n) - 2n\cdot I(n-1)$$

$$0 = (2n+1)\cdot I(n) - 2n\cdot I(n-1)$$

$$(2n+1)I(n) = 2n\, I(n-1)$$

$$\boxed{I(n) = \frac{2n}{2n+1} I(n-1)} \quad \text{—①}$$

ここで, 区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ で $\cos x > 0$ だから $(\cos x)^{2n+1} > 0$ より すべての自然数 $n$ で $I(n) > 0$ であるから

①より $\boxed{I(n) < I(n-1) \text{ がなりたつ.}}$

また①より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I(n)}{I(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{2n+1} I(n-1)}{I(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{n}} = \boxed{1}$ となる