0以上の自然数 n に対して $I(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}{}_nC_k$ とおく。ただし、${}_0C_0=0$ である。

(1)　$I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$(1-y^2)^n$ を二項定理を用いて展開することにより　$I(n)=\int_0^1(1-y^2)^n dy$　であることを示せ。

(3)　$y=\sin x$ と置換することにより $\int_0^1(1-y^2)^n dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{2n+1}dx$　であることを示せ。

(4)　$n\geqq 1$ のとき、$\frac{d}{dx}\{(\cos x)^{2n}\sin x\}=(2n+1)(\cos x)^{2n+1}-2n(\cos x)^{2n-1}$　であることを示せ。

(5)　$n\geqq 1$ に対して　$I(n)<I(n-1)$ であること、および $\lim_{n\to\infty}\frac{I(n)}{I(n-1)}=1$ であることを示せ。

['04お茶の水女子大]