$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ について

(1) $I(m,1)=\int_0^1 x^m(1-x)^1 dx$

$=\int_0^1 (x^m - x^{m+1})dx$

$=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}-\frac{1}{m+2}x^{m+2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}$

$=\frac{(m+2)-(m+1)}{(m+1)(m+2)}=\boxed{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}$

(2) $n\geqq 2$のとき

$\boxed{I(m,n)}=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'(1-x)^n dx$

$=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}\cdot(1-x)^n\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{m+1}x^{m+1}\cdot n(1-x)^{n-1}dx$

$=0+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$

$\boxed{=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)}$

(3) (1)(2)より $n\geqq 2$のとき

$I(m,n)=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$

$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot I(m+2,n-2)$

$\vdots$

$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{m+(n-1)}\cdot I(m+n-1,1)$

$=\frac{m!\,n!}{(m+n-1)!}I(m+n-1,1)$

$=\frac{m!\,n!}{(m+n-1)!}\times\frac{1}{(m+n-1+1)(m+n-1+2)}$

$=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ (これは $n=1$ でもなりたつ).

よって $\boxed{I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}}$ となる